12-12-2022

Transposición didáctica para la enseñanza de la matemática avanzada por medio de gamificación

Juan David Firigua Bejarano

Karen Giset Duarte Moyano

Jesús Antonio Villarraga Palomino

Editorial UCundinamarca
Facultad de Educación

TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA AVANZADA POR MEDIO DE GAMIFICACIÓN

UdeC
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
UCUNDINAMARCA GENERACIÓN SIGLO 21
30 AÑOS

Transposición didáctica para la enseñanza de matemáticas avanzadas a través de la gamificación

Transposición didáctica para la enseñanza de matemáticas avanzadas a través de la gamificación

Autores

Juan David Firigua Bejarano
Karen Giset Duarte Moyano
Jesús Antonio Villarraga Palomino

Juan David Firigua Bejarano, Karen Giset Duarte Moyano, Jesús Antonio Villarraga Palomino.

Transposición didáctica para la enseñanza de matemáticas avanzadas a través de la gamificación.

Universidad de Cundinamarca – Sede Fusagasugá.

Fusagasugá: Sello Editorial Universidad de Cundinamarca, 2022.

170 páginas.

Incluye referencias bibliográficas e ilustraciones.

ISBN: 978-628-7621-03-9 ISBN-e: 978-628-7621-14-5

Sello Editorial Universidad de Cundinamarca
Fusagasugá, Colombia Diagonal 18 No. 20-29
Teléfono: (+571) 828 1483
editorial@ucundinamarca.edu.co
https://www.ucundinamarca.edu.co

Diseño de cubierta:
Javier Alexander Moreno Jiménez
Corrección de estilo y diagramación:
Franz Sebastián González

Hecho el depósito que establece la ley
ISBN: 978-628-7621-03-9
ISBN-e: 978-628-7621-14-5

Primera edición, 2022

Esta obra tiene una versión de acceso abierto disponible en el Repositorio Institucional de la Universidad de Cundinamarca:
https://repositorioctei.ucundinamarca.edu.co/

Universidad de Cundinamarca
Vigilada Mineducación
Reconocimiento personería jurídica:
Resolución No. 19530, de diciembre 30 de 1992

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

Este libro es el resultado del proyecto de investigación *Secuencias didácticas desde la enseñanza para la comprensión en el mejoramiento de las actitudes hacia la ciencia y la matemática en el Sumapaz*, desarrollado en la Universidad de Cundinamarca, como parte del programa de Licenciatura en Matemáticas. El objetivo principal de este proyecto fue diseñar escenarios gamificados para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos avanzados de matemáticas, como las teselaciones, los fractales, la geometría esférica, la teoría de grafos y la topología. La investigación se fundamentó en la teoría de la *transposición didáctica* propuesta por Chevallard (1997), así como en la dinámica de entornos gamificados planteada por Werbach y Hunter (2015).

Para llevar a cabo este estudio, se utilizó una metodología de enfoque cualitativo y se trabajó con un grupo de sesenta y siete (67) estudiantes de décimo grado de la escuela Fundación Manuel Aya en Fusagasugá. La caracterización de la población se realizó mediante diversas actividades que permitieron diseñar y aplicar dinámicas de escenarios gamificados. Durante el proceso, se emplearon técnicas de observación, evidencia fotográfica y grabaciones en video para verificar la comprensión conceptual de los estudiantes en relación con cada uno de los conceptos teóricos abordados. Los resultados demostraron que la implementación de escenarios gamificados, en consonancia con las transposiciones didácticas de los conceptos teóricos, contribuyó de manera significativa al proceso académico de los estudiantes que participaron en este proyecto.

En vista de que la educación desempeña un papel fundamental en la transmisión del conocimiento, resulta de suma importancia contextualizar los contenidos curriculares en las instituciones educativas. Esto implica un desafío constante para los docentes, quienes deben incorporar de manera continua la innovación y aprovechar nuevas tendencias y modelos en los procesos de enseñanza y aprendizaje, como es el caso de la gamificación. Además, el conocimiento debe estar en constante evolución y adaptarse a partir de la transposición didáctica.

Con esta premisa, el presente libro se adentra en la generación de procesos didácticos para la transposición de contenidos matemáticos avanzados, como las teselaciones, los fractales, la geometría esférica, la teoría de grafos y la topología, a través del enfoque de la gamificación. Para ello, se comparte la experiencia vivida en el aula con un grupo de estudiantes de décimo grado de una institución educativa privada.

Capítulo 1

Diseño del juego

Los componentes de la construcción de escenarios gamificados de Werbach y Hunter (2015) describen detalladamente el entorno de gamificación a utilizar, que se basa en: elementos de juego y el recorrido del jugador; además de la descripción de la secuencia didáctica para cada nivel.

Elementos del juego

El objetivo de la gamificación se basa en enseñar matemáticas avanzadas (teselaciones, fractales, geometría esférica, topología y teoría de grafos) y asociar esto a través de diversas profesiones, ya que será de gran aporte para el proyecto de vida profesional, pues acerca a los alumnos a diversos trabajos matemáticos. Esto para poder generar concepciones, razonamientos en ideas que promuevan actitudes complejas y abstractas, como la creatividad y la comprensión del mundo que los rodea a través de la innegable matemática tan presente en el universo. De tal manera que los alumnos sean capaces de lograr el razonamiento, la comprensión y la extrapolación en las diferentes áreas del conocimiento que se pretende transmitir.

- ***Narrativa:*** la narrativa en el escenario de gamificación se denomina *búsqueda de profesiones*, para lo cual se diseña una serie de cinco niveles, cada uno de los cuales aborda temas avanzados de matemáticas: teselaciones, fractales, geometría esférica, topología y teoría de grafos.

Además, cada uno de los niveles se estructura mediante subniveles jerárquicos de conocimiento basados en la taxonomía de Bloom.

- ***Subniveles:*** se utilizan cuatro subniveles; cada uno de ellos requiere que el alumno haya alcanzado el subnivel anterior.

  - *Representación e interpretación:* este subnivel aborda la forma en que el alumno procesa la información, las capacidades cognitivas y las habilidades que desarrolla para gestionar la aprehensión conceptual.
  - *Formulación y ejecución:* este subnivel aborda cómo interviene en las habilidades para la aplicación de los procesos aprendidos.
  - *Argumentación:* en este subnivel se evalúa cómo el alumno relaciona la descomposición del conocimiento y la relación con estructuras globales o generales.
  - *Superior:* este subnivel está disponible para los jugadores que hayan completado los subniveles anteriores en su totalidad. En él se afrontarán retos de creación, planificación y reproducción.

- ***Identidades:*** la dinámica del juego se lleva a cabo a través de seis grupos, cinco de los cuales están formados por alumnos que asisten regularmente a las secciones presenciales y el otro grupo estará formado por alumnos que se conectan virtualmente. Cada grupo elige un nombre y un logotipo que le caracterizará a lo largo del juego.

- ***Recompensas:*** los grupos competirán en los diferentes subniveles por conseguir cada una de las letras que componen la profesión que caracteriza al nivel. Los grupos que construyan primero la profesión ganarán tres estrellas, y la asignación de estrellas a los demás grupos dependerá del número de letras obtenidas por nivel.

- ***Metas y objetivos:*** tras completar los cinco niveles, el grupo que obtenga el mayor número de estrellas tendrá la oportunidad de ser el primero en elegir el tipo de robot a construir y competir con el resto de los grupos en la carrera final.

Se utilizará el Kit Educativo Robot Solar 13 in 1.

Figura 1. *Kit Educativo Robot Solar 13 in 1*

Fuente: elaboración propia.

Reglas: para conseguir letras tendrá las siguientes condiciones.

- Todos los grupos comienzan con dos letras.
- Por cumplimiento en cada subnivel se obtienen dos letras.
- Para acceder a las pistas hay que devolver una carta.
- Dependiendo de la cooperación de los participantes de cada grupo, se pierden o se ganan cartas.

Gana el grupo que completa la profesión del nivel.

Nota: el número de cartas iniciales dependerá del número total de cartas de la profesión de cada nivel.

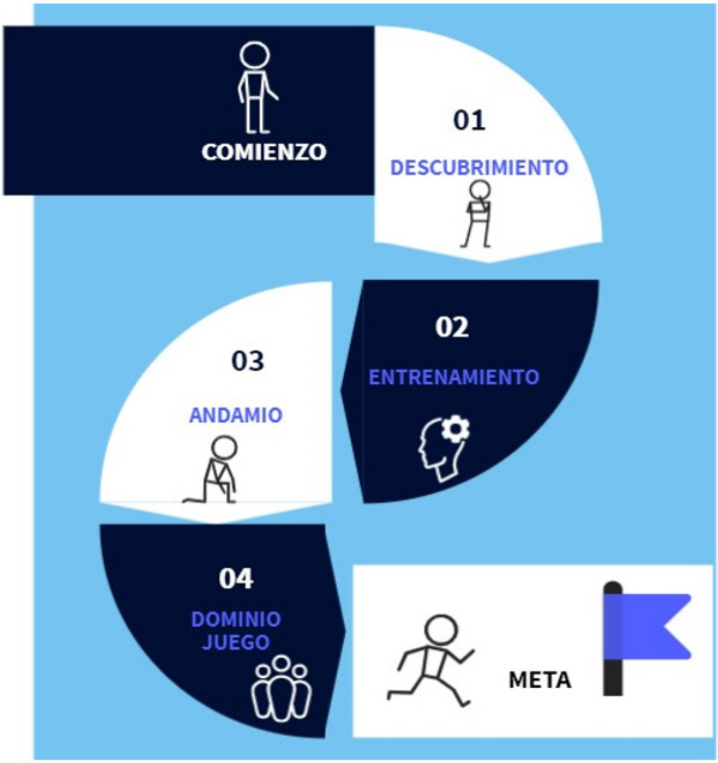
Estado y progreso visibles: en cada una de las secciones, se hace visible a los participantes su progreso en relación con las letras ganadas por cada nivel o la puntuación final que es el número de estrellas por grupo.

Retroalimentación: en cada uno de los niveles, se proporcionarán guías y apoyo a los grupos en relación con las dificultades presentes en los retos de cada subnivel, esto permitirá dirigir el progreso del juego y también permitirá a los alumnos ir actuando de forma correcta o incorrecta.

Trayecto del jugador

Para la implementación de la gamificación, se consideran las etapas que los jugadores experimentan en el viaje del juego definido por Yu-kai (2013) y Sudarshan (2013).

Figura 2. *Trayectoria del juego: búsqueda de profesiones*



Fuente: elaboración propia.

La trayectoria del juego: *Búsqueda de profesiones* se estructura para cada nivel a través de cuatro etapas. La primera etapa es la socialización a los jugadores de los elementos del juego. En la segunda etapa es la aplicación del primer subnivel, que consiste en actividades con un bajo nivel de complejidad, con el objetivo de inducir a los jugadores a saber cómo es la dinámica del juego. La tercera etapa es la implementación del subnivel 2, que son actividades con un mayor grado de complejidad y la incorporación de retroalimentación. En la cuarta etapa se realiza el subnivel 3 y superiores, con el objetivo de que el jugador avance en el juego a través de la adquisición de nuevas habilidades o conocimientos.

Niveles

A continuación, se presenta la secuencia didáctica para cada uno de los niveles, estructurada de la siguiente manera: objetivo de aprendizaje, momentos (identificación de conocimientos, retos y evaluación de conocimientos), contextualización y criterios de evaluación. Dentro del momento de retos, se describen las actividades, materiales, técnicas de desarrollo y evaluación utilizados.

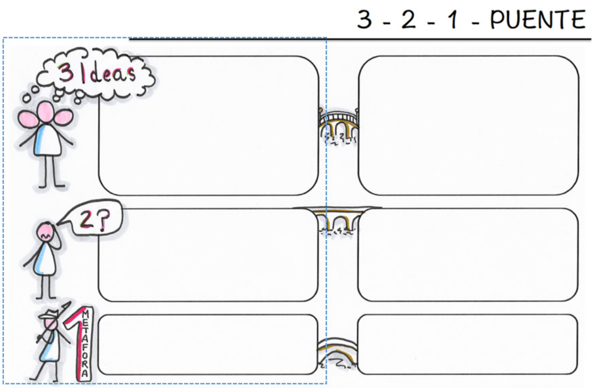
1er nivel: Teselados

Para el desarrollo del 1er nivel teselados se divide en tres momentos: identificación de conocimientos, retos y evaluación de conocimientos.

Momento 1: identificación de los conocimientos

Desarrollo: cada grupo debe rellenar en la primera columna las tres casillas marcadas de la siguiente forma: primera recuadro tres ideas sobre la pregunta ¿qué es un mosaico o teselado? En el siguiente recuadro dos preguntas que tengan sobre el tema. Por último, ilustrar un mosaico.

Figura 3. *Rutina de pensamiento 1° Nivel*



Fuente: elaboración propia.

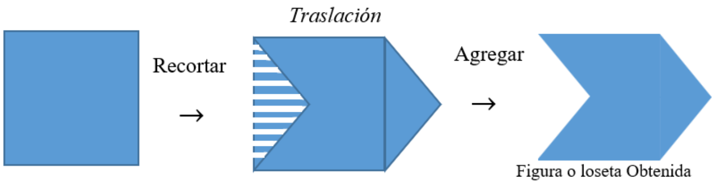
Momento 2: retos

Contextualización: antes de comenzar las actividades, se presentan los conceptos básicos que deben tenerse en cuenta al desarrollar los subniveles. Cada una de las explicaciones está guiada por la construcción del modelo de cada isometría.

Isometrías

Traslación: es el deslizamiento rectilíneo de cada uno de los puntos a una distancia constante y en una dirección determinada.

Figura 4. *Traslación*



Fuente: elaboración propia.

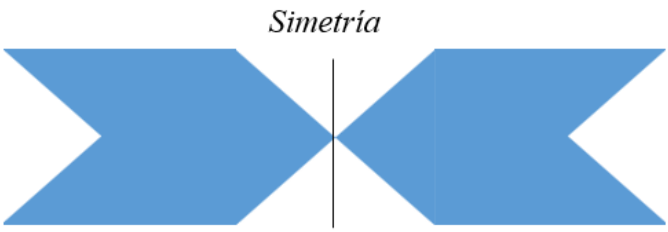
Rotación: movimiento realizado alrededor de un punto que mantiene inalterada la forma y el tamaño de la figura original.

Figura 5. *Rotación*

Fuente: elaboración propia.

Simetría: es el reflejo de una deformación con respecto a un eje.

Figura 6. *Simetría*



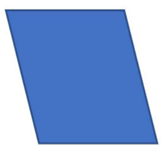
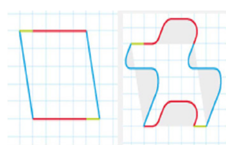
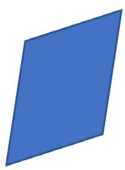
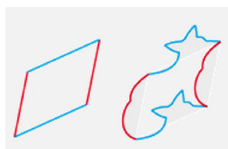
Fuente: elaboración propia.

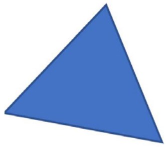
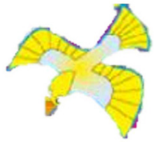
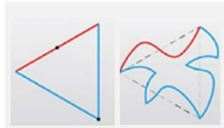
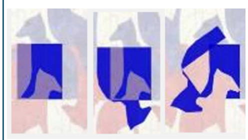
Subnivel 1: Representación e interpretación

Materiales: tijeras, soporte, cinta adhesiva, bolígrafos, polígono y loseta asignada.

Desarrollo: a cada grupo se le asigna un polígono y la figura o loseta que tendrán que conseguir o construir mediante deformaciones o simetrías. Además, cada grupo dispone de una serie de pistas, que serán repartidas por el profesor siempre que los alumnos las demanden.

Tabla 1. *Reto construcción teseladas*

Grupo	Polígono	Figura o loseta deseada	Pista
1.°: Paralelogramo			
2.°: Paralelogramo			

Grupo	Polígono	Figura o loseta deseada	Pista
3.°: Triángulo equilátero			
4.°: Cuadrado			
5.°: Rectángulo			

Fuente: elaboración propia.

Subnivel 2: formulación y aplicación

Materiales: hoja de papel adhesivo, rotuladores y colores.

Desarrollo: después de tener la imagen o tesela del subnivel 1 cada grupo deberá construir un mosaico, utilizando la repetición de la loseta. Hay que tener en cuenta que, para la construcción del mosaico sobre el papel adhesivo, no debe haber posiciones superpuestas, ni espacios entre las losetas.

Figura 7. *Mosaicos*

Fuente: elaboración propia.

Momento 3: evaluación del conocimiento

Subnivel 3: argumentación

Materiales: papel y bolígrafo.

Desarrollo: cada grupo debe describir los elementos simétricos utilizados para encontrar el bloque correspondiente. Se recomienda que se apoyen en ilustraciones.

Técnica de evaluación: intercambios orales, para demostrar los conocimientos adquiridos, cada grupo debe socializar a través de una breve exposición el desarrollo de la teselación y lo aprendido en clase.

Espacio de retroalimentación:

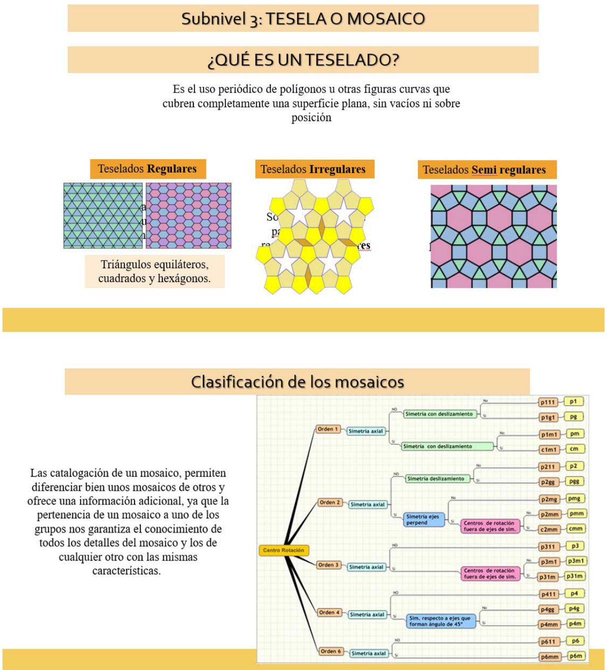
- ¿El área del polígono y loseta correspondiente es el mismo?
- ¿Se puede construir teselados utilizando polígonos regulares e irregulares?
- ¿Existe alguna clasificación de los teselados? ¿La clasificación dependerá de qué factor?
- ¿Proporcione ejemplos donde pueda evidenciar teselados?

Figura 8. *Retroalimentación aplicación teselados*

Fuente: elaboración propia.

Espacio de retroalimentación: construcción de la definición, tipos y clasificación de teselados.

Figura 9. *Retroalimentación aplicación teselados*



Fuente: elaboración propia.

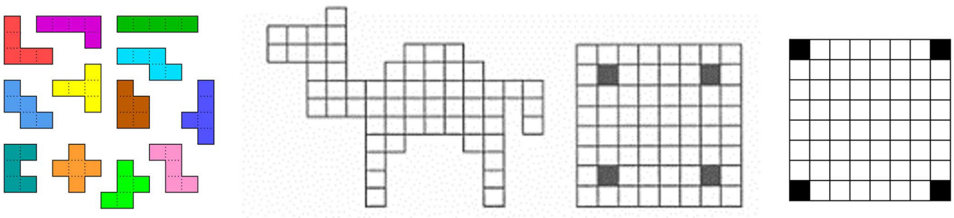
Nivel superior: Pentominó

Materiales: pentominós y tableros.

Desarrollo: con los doce pentominós, utiliza una y solo una vez, para cubrir el tablero designado.

Nota: en los tableros de ajedrez, las casillas que sean negras no deben ocultarse con los pentominós.

Figura 10. *Tableros de juego*



Fuente: elaboración propia.

Técnica de evaluación:

¿Qué he aprendido? Realización de la rutina de pensamiento 3-2-1 puente. Cada grupo debe diligenciar en la segunda columna las tres casillas marcadas de la siguiente manera: primera casilla tres ideas sobre la pregunta ¿qué es un mosaico o azulejo? En el siguiente recuadro dos preguntas que tengáis sobre el tema. Por último, ilustrar un mosaico.

Criterios de evaluación:

- El alumno mostrará actitudes favorables a la actividad y valorará la aportación de los conocimientos de sus compañeros a la resolución de problemas en la construcción de mosaicos o teselaciones.

- El alumno debatirá, con lenguaje asertivo, con sus compañeros sobre su posición en relación con la construcción de los mosaicos.
- El alumno debatirá sobre las respuestas y procedimientos llevados a cabo en las construcciones.
- El alumno demuestra dominio del contenido expuesto. Comprende, argumenta lo que dice y transmite el contenido a sus compañeros de forma asertiva.

2do nivel: Fractales

Objetivo de aprendizaje:

- Reconocer los principios de la geometría fractal y sus formas fractales básicas.
- Utilizar formas fractales en diseños específicos a través de diversos materiales.

Para el desarrollo del 2do nivel fractales se divide en dos momentos: retos y evaluación de conocimientos.

Momento 1: retos

Subnivel 1: Representación e interpretación

¿Qué longitud tiene la costa de Gran Bretaña?

Materiales: fotocopia del croquis de la costa de Gran Bretaña, tiras de papel de 1,5 cm y 3,5 cm de ancho, regla, bolígrafos y Google Maps.

Desarrollo: cada alumno tiene la fotocopia del croquis de la costa de Gran Bretaña, sobre esta tendrá que estimar la medida de la costa cubriendo el contorno con las tiras de papel.

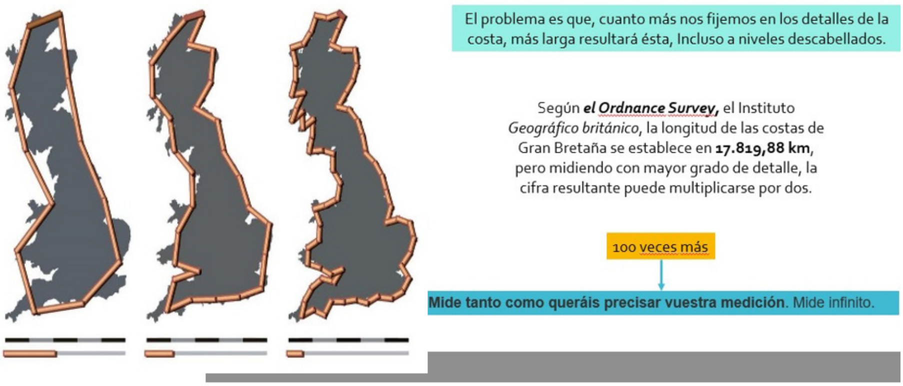
Tabla 2. *Estimaciones de la medida de la consta de Gran Bretaña*

Primera estimación: Utilización tiras de papel de 3,5 cm de ancho.	**Segunda estimación: Utilización tiras de papel de 1,5 cm de ancho.**
 Simulación: 18 tiras utilizadas Respuesta: La costa mide 63 cm	 Simulación: 49 tiras utilizadas Respuesta: La costa mide 73,5 cm

Fuente: elaboración propia.

Conclusión: cada alumno analiza que la medida de un contorno geográfico depende de la regla con la que se mide. La línea de costa será más larga cuando cada uno de los fragmentos o detalles se mida con precisión con una regla más pequeña.

Figura 11. *Retroalimentación costa de Gran Bretaña*



Fuente: elaboración propia.

Técnica de evaluación: registros prácticos, los alumnos presentarán en Padlet (Llamado: 2do Nivel ¿cuánto mide la costa de Gran Bretaña?) sus evidencias del subnivel 1 y el análisis de las simulaciones.

Figura 12. *Padlet costa de Gran Bretaña*

Fuente: elaboración propia.

Subnivel 2: Formulación y aplicación

Construcción fractal

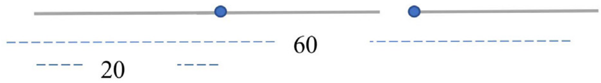
La Curva de Koch:

La construcción de este fractal se desarrollará con la ayuda del profesor.

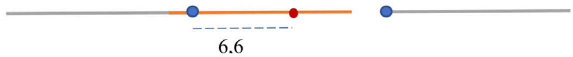
Materiales: cuerda dulce de 60 cm, regla y rotuladores.

Desarrollo:

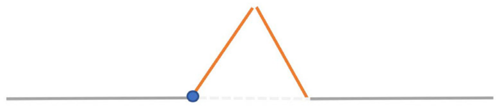
Paso 1: Se divide el hilo en tres intervalos iguales. Utiliza un rotulador para indicar cada uno de los intervalos.



Paso 2: Construir un triángulo equilátero sin su base en el intervalo central. Para que el alambre se doble en el intervalo central, hay que dividirlo en dos intervalos iguales.



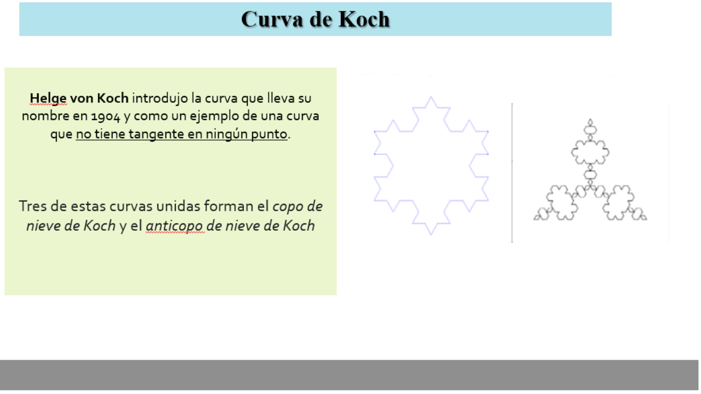
Después de los intervalos, se dobla el alambre en cada uno de los vértices para obtener el triángulo equilátero.



Paso 3: Repita el paso 1 en cada uno de los cuatro intervalos resultantes.

Si repite el proceso infinitas veces, lo conseguirá:

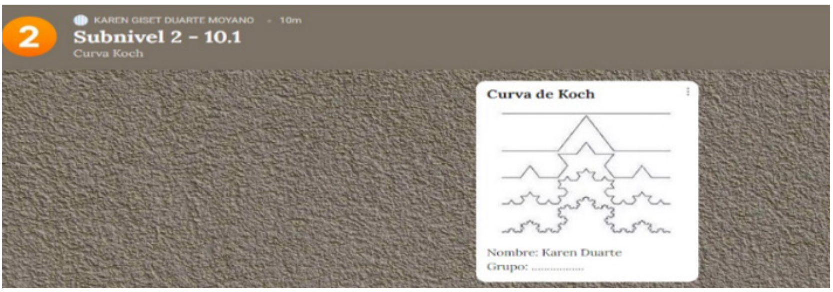
Figura 13. *Retroalimentación curva de Koch*



Fuente: elaboración propia.

Técnica de Evaluación: ejercicio práctico-registro, los alumnos subirán al Padlet (Denominado: 2° Nivel - Curva de Koch) las respectivas pruebas hasta el subnivel 2.

Figura 14. *Padlet costa de Gran Bretaña*

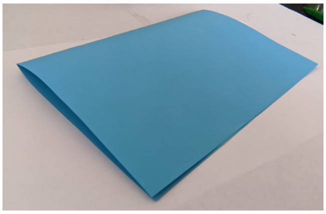
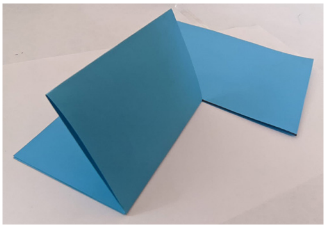
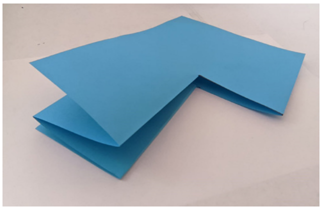
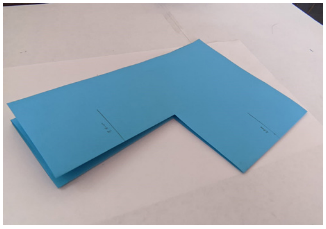
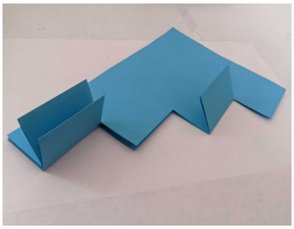


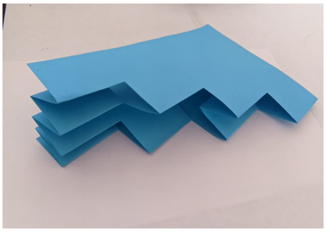
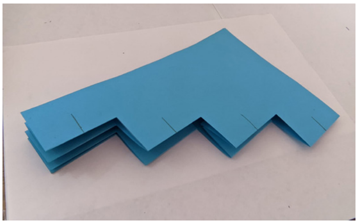
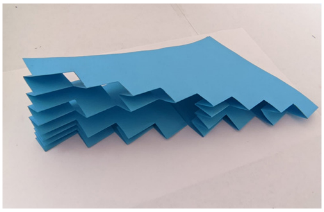
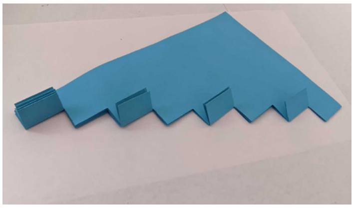
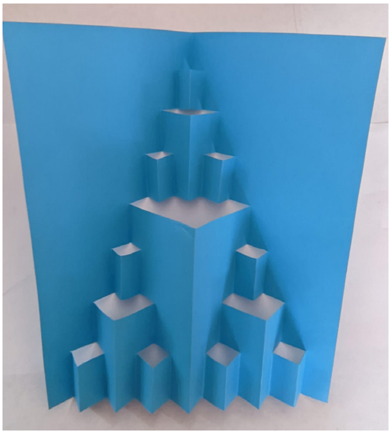
Fuente: elaboración propia.

Triángulo de Sierpinski: La construcción de este fractal será desarrollada por los alumnos a través de la lectura de imágenes.

Materiales: hoja, tijeras, regla y bolígrafos.

Tabla 3. *Reto construcción Triángulo Sierpinski*

1° Paso: 	2° Paso:  Pista: Dividimos la hoja a lo largo del doblez en dos partes iguales, haciendo un corte de longitud la mitad de lo que queda hasta el otro lado.
3°Paso: 	4°Paso: 
5° Paso: 	6° Paso 

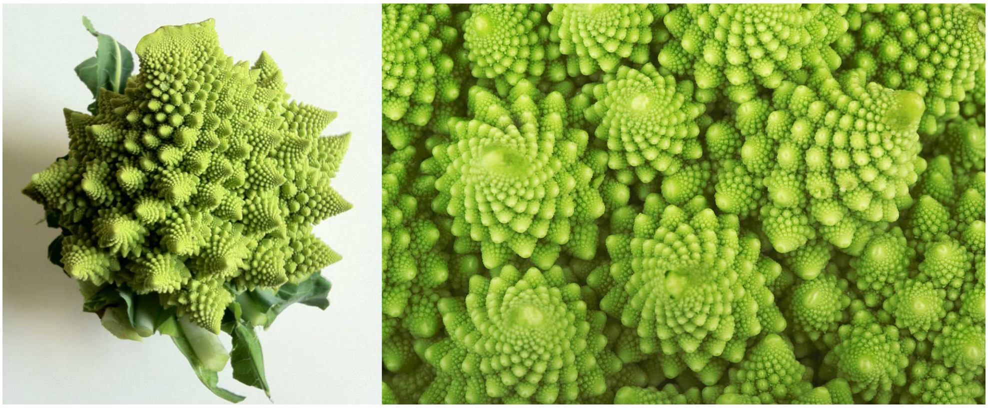
7° Paso:	8° Paso:
	
9°Paso:	10° Paso:
	
Resultado Final	
	

Fuente: elaboración propia.

Técnica de evaluación: intercambios orales-diálogo, los alumnos narrarán lo que experimentaron en la construcción del triángulo de Sierpinski en relación con las simulaciones realizadas.

Contextualización: descripción de la coliflor romanesco.

Figura 15. *Coliflor romanesca*



Fuente: elaboración propia.

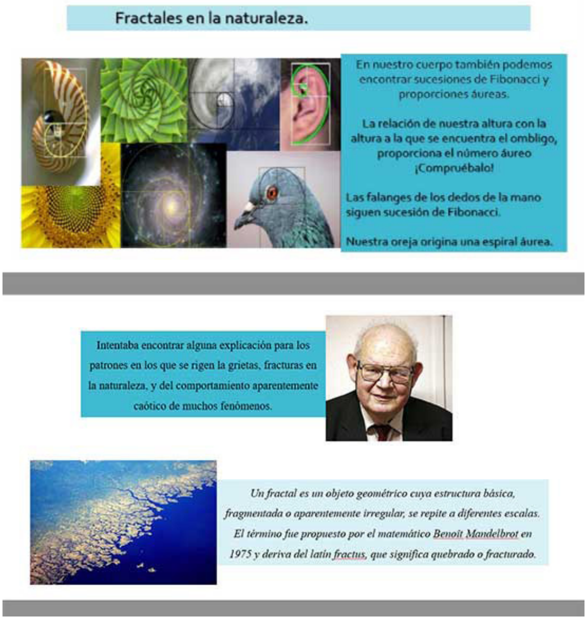
Las características más llamativas del romanesco son su tonalidad verde y su estructura mediante picos. Si nos fijamos en la segunda imagen Figura 15 cada pico, a su vez, está formado por más picos, aparentemente no sigue un patrón. Pero si se analiza en detalle cada uno de los pequeños picos que componen la serie, esta está formada por picos. Si se analiza cada uno de los picos con una lupa, se observa el mismo patrón hasta en su estructura molecular.

Por tanto, cada pico repite siempre el mismo patrón, si analizamos este patrón en un lenguaje matemático, se trata de la espiral de Fibonacci.

Serie de Fibonacci: la secuencia comienza con los números 0 y 1, y a partir de estos, cada término es la suma de los dos anteriores.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... Infinito.

Figura 16. *Retroalimentación concepto de fractal*



Fuente: elaboración propia.

Concepto de fractal: "Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas" (Mandelbrot, 1975). El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975 y deriva del latín *fractus*, que significa roto o fracturado.

Subnivel 3: Argumentación

Materiales: Hojas de papel y bolígrafos.

Desarrollo: A cada grupo se le asigna una imagen de la Tabla 4. Los miembros de los grupos tienen que analizar si la imagen se asocia a un fractal o no y ¿por qué?

Tabla 4. *Reto análisis fractales en la naturaleza*

Ejemplo	Grupo N°1	Grupo N°2
		
Grupo N°3	**Grupo N°4**	**Grupo N°5**
		

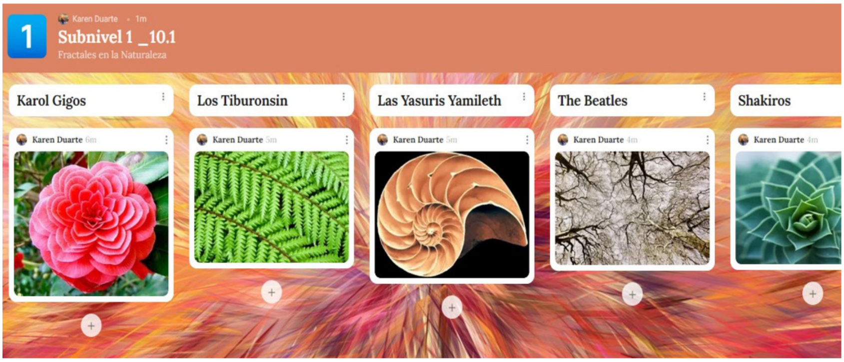
Fuente: elaboración propia.

Conclusión: El subnivel 1 finalizó destacando la importancia que Mandelbrot generó para el mundo de la geometría fractal, ya que trató de encontrar alguna explicación a los patrones por los que se rigen las grietas, las fracturas de la naturaleza y el comportamiento caótico de muchos fenómenos.

> Los fenómenos de gran irregularidad son de naturaleza generalizada. Se encuentran formas de gran complejidad. Estas formas no podían examinarse geométricamente antes porque no existía un lenguaje para describirlas. Existe un enorme número de estructuras que solo pueden describirse mediante la geometría fractal. (Mandelbrot, 1975)

Técnica de evaluación: Examen escrito, los miembros de cada grupo subirán a Padlet (llamado: 2° nivel - Fractales en la naturaleza) su correspondiente análisis de imagen.

Figura 17. *Padlet costa análisis fractales en la naturaleza*



Fuente: elaboración propia.

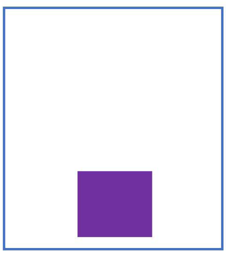
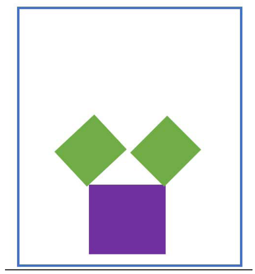
Subnivel superior

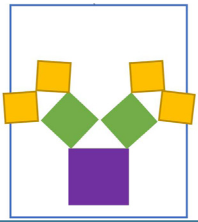
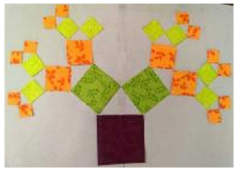
El árbol de Pitágoras: La construcción del fractal la desarrolla el alumno utilizando las siguientes instrucciones.

Materiales: Hoja tamaño carta, hojas de colores, regla y plumones.

Desarrollo: El árbol pitagórico es una construcción iterativa que comienza con un cuadrado al que se le van añadiendo cuadrados cada vez más pequeños.

Tabla 5. *Reto construcción árbol de Pitágoras*

Paso 1: Construya un cuadrado en la parte inferior central de la hoja de L= 10 cm. 	Paso 2: En la primera iteración construya en una hoja aparte dos cuadrados de lado L , recórtalos y añádelos en las esquinas superiores del cuadrado, (formando un ángulo de 45°). 

Paso 3: En la siguiente iteración, se repite el paso anterior en cada uno de los nuevos cuadrados añadidos (cuadrados verdes). 	Paso 4: Repita el procedimiento dos veces más. 

Fuente: elaboración propia.

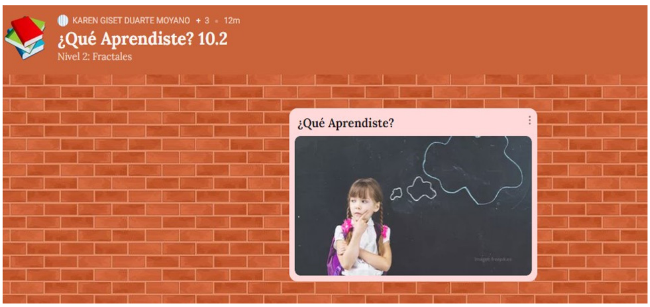
Figura 18. *Padlet costa análisis fractales en la naturaleza*

Fuente: elaboración propia.

Momento 2: evaluación de los conocimientos

Técnica de evaluación: Intercambios orales, se construirá una lluvia de reflexiones sobre lo aprendido en el 2° Nivel Fractal.

Figura 19. *Padlet ¿Qué aprendí?*



Fuente: elaboración propia.

Espacio de retroalimentación: Aplicación de fractales.

Figura 20. *Retroalimentación aplicación fractal*

Fuente: elaboración propia.

Criterios de evaluación:

- El alumno participará activamente en cada actividad y entregará las respectivas pruebas en Padlet.
- El alumno discutirá las respuestas y procedimientos llevados a cabo en las construcciones de cada fractal.
- El alumno ejemplificará a través de fenómenos naturales el estudio de la geometría fractal.

3er Nivel: Geometría Esférica

Objetivo de aprendizaje: Interpretar los postulados de Euclides y reconocer la falencia del postulado cinco en una superficie esférica.

Reconocer la diferencia entre distancia plana y geodésica, por medio del análisis de diversas medidas entre un mapamundi y globo terráqueo o bola de icopor.

Para el desarrollo del 3° Nivel Geometría Esférica se divide en tres momentos: Identificación, retos y evaluación de conocimientos.

Momento 1: identificación

Técnica de evaluación: Rutina de Pensamiento, esta técnica se desarrolla con el fin de comprender los conocimientos previos y dudas sobre el tema a trabajar y así establecer conexiones con el contenido trabajado por el docente y los conocimientos previos.

Desarrollo: Cada grupo solo tendrá que rellenar la primera columna ¿Qué entiendes por geometría esférica?

Figura 21. *Rutina de pensamiento 3°Nivel*

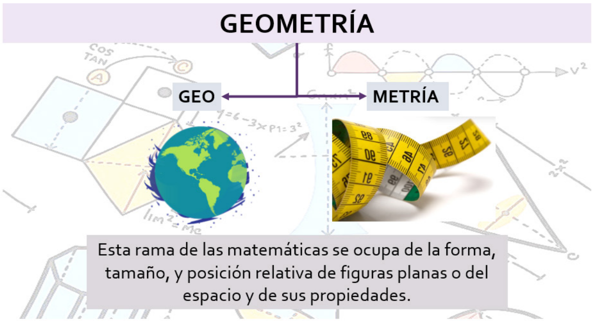
Fuente: elaboración propia.

Momento 2: reto

Contextualización: ¿Qué es la geometría?

La geometría es una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las formas, medidas, posiciones y propiedades de las figuras planas o del espacio.

Figura 22. *Retroalimentación geometría*



Fuente: elaboración propia.

Subnivel 1: Representación e interpretación

¿Cuál es la distancia más corta entre Bogotá-Colombia y Roma-Italia?

Materiales: Copia del Mapamundi, bola de poliestireno N°12, regla, hilo y bolígrafos.

Desarrollo: Cada grupo deberá calcular la distancia más corta entre Bogotá y Roma con los materiales disponibles y justificar los procedimientos realizados para hallar dicha distancia.

Subnivel 1: Representación e interpretación

¿Cuál es la distancia más corta entre Nueva York y Tokio?

Materiales: Copia del Mapamundi, pelota de poliestireno N°12, regla, línea y bolígrafos.

Desarrollo: Cada grupo debe analizar el siguiente enunciado y responder la pregunta utilizando el material disponible: Si elegimos la ruta entre Nueva York y Tokio, que distan solo unos cinco grados en cuanto a latitud, ¿el viaje fue principalmente por mar o por tierra?

Técnica de evaluación: Prueba escrita, cada grupo redactará y argumentará los procedimientos elegidos para resolver los retos del Subnivel 1: Mapamundi.

Contextualización: Estudio de la geometría

El estudio de la geometría se centró en los griegos, especialmente en Euclides. Implementando una geometría más axiomática, proponiendo enunciados o nociones que dieron fundamento a la geometría euclidiana a través de cinco postulados.

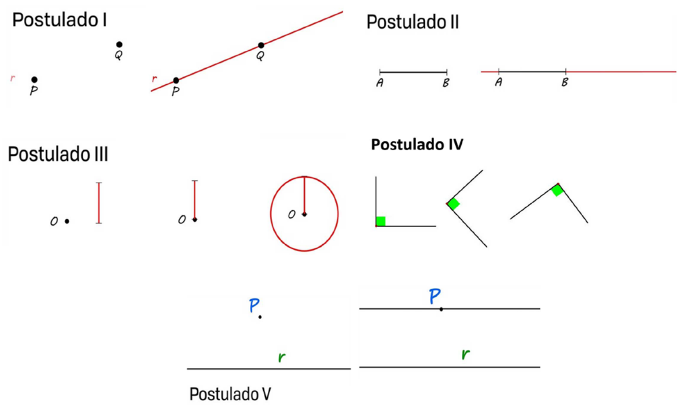
Subnivel 1: Representación e interpretación

Postulados de Euclides

Materiales: Imagen del postulado y plumones.

Desarrollo: A cada grupo se le asigna al azar la imagen de un postulado, el objetivo es encontrar el enunciado adecuado que describa las imágenes correspondientes al postulado dado.

Figura 23. *Postulados de Euclides*



Fuente: elaboración propia.

Técnica de evaluación: Intercambios orales y prueba escrita, El enunciado escrito por cada uno de los grupos se socializa entre los estudiantes y se evaluará su pertinencia.

Espacio de retroalimentación: Postulados de Euclides

- Postulado I: Dados dos puntos diferentes, se puede trazar una sola recta que los una.
- Postulado II: Cualquier segmento puede extenderse o prolongarse continuamente en cualquier dirección.
- Postulado III: Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio.
- Postulado IV: Todos los ángulos rectos son iguales.
- Postulado V: A un punto exterior a una recta puede pasar una y solo una recta paralela a esa recta.

¿Funciona el quinto postulado en todas las áreas? ¿Es cierto? Es decir, ¿pasará una y solo una paralela? ¿Y si no pasara nada? ¿Y si pasaran dos o más? Podría ser cierto. Pero en ese caso, ¿no puede deducirse de los otros cuatro y de las nociones comunes?

Contextualización: Del quinto postulado se puede afirmar:

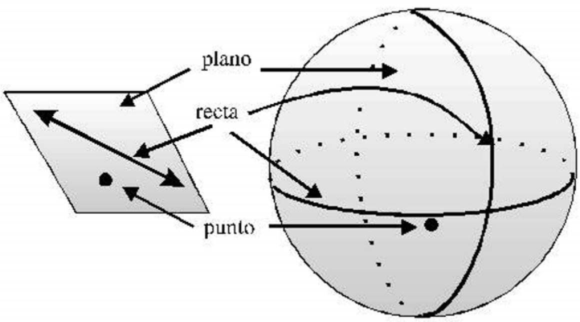
- Que ninguna paralela (geometría esférica) pasa por un punto exterior a una recta.
- Que las paralelas pasan por un punto exterior a una recta, pero no necesariamente por una sola (geometría hiperbólica).

Por tanto, la geometría no euclidiana se define como aquella que no satisface el quinto postulado de Euclides. Con ello se define el término geometría esférica.

Geometría esférica: Es el estudio de las propiedades de las rectas, puntos, segmentos y figuras geométricas situadas sobre una superficie esférica.

El plano de representación de esta geometría es la esfera, los puntos se definen de la forma habitual en la geometría euclidiana, las rectas o segmentos se representan como los círculos máximos que pueden trazarse sobre la esfera.

Figura 24. *Geometría esférica*



Fuente: elaboración propia.

Subnivel 2: Formulación y aplicación

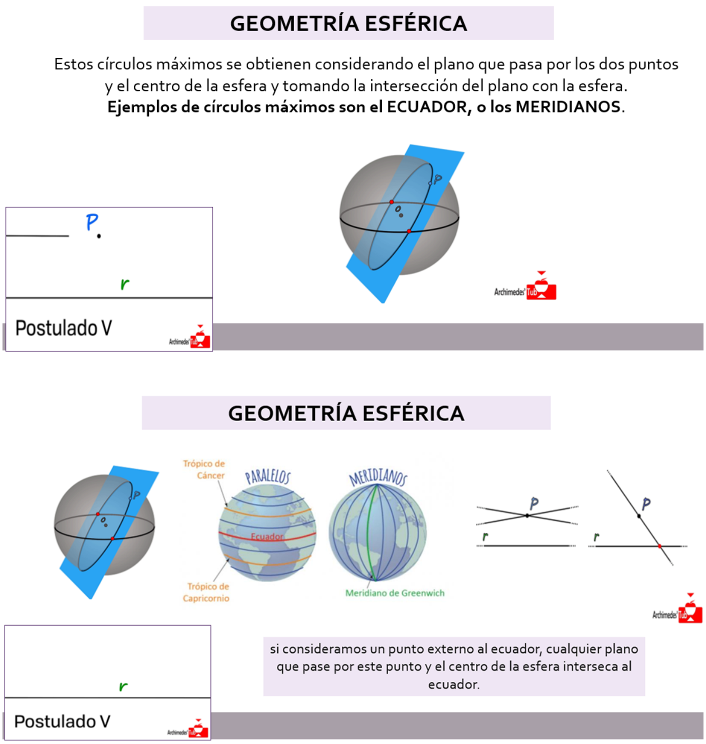
Círculos máximos

Materiales: barra de plastilina y regla.

Desarrollo: Cada uno de los grupos deberá modelar un círculo máximo sobre una esfera de plastilina, teniendo en cuenta el siguiente enunciado: Se obtienen considerando el plano que pasa por los dos puntos y el centro de la esfera y tomando la intersección del plano con la esfera.

Espacio de retroalimentación:

Figura 25. *Retroalimentación geometría esférica*



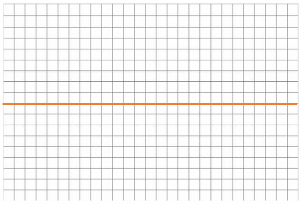
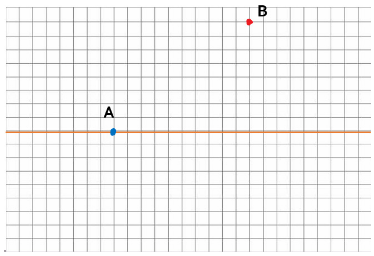
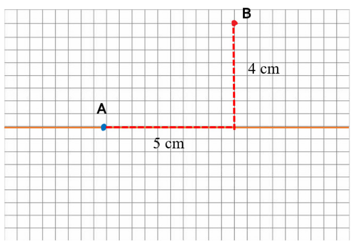
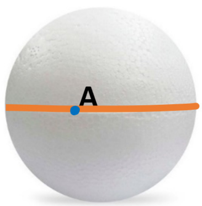
Fuente: elaboración propia.

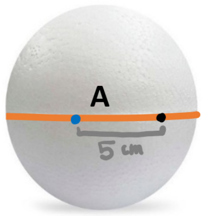
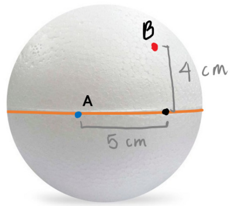
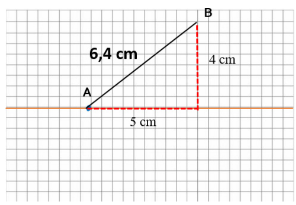
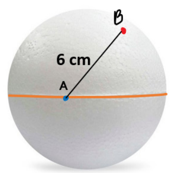
Subnivel 2: Formulación y realización

Materiales: bola de icopor N.° 6, hilo, regla y un rectángulo de 19 cm x 9 cm (construcción en una hoja cuadriculada).

Desarrollo: La construcción se realiza bajo la guía del profesor.

Tabla 6. *Reto distancia entre dos puntos*

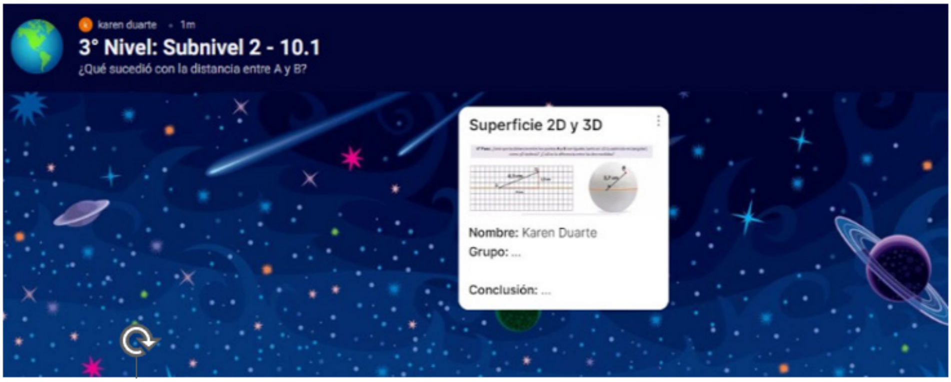
1° Paso: En la cuadricula dibuja una recta que divida lo alto de la cuadricula (9cm) en dos partes iguales. En la bola de icopor remarque la línea de la circunferencia máxima que divide a la esfera en dos hemisferios iguales.	 
2° Paso: En la cuadricula ubica un punto sobre la recta naranja (punto A) y el otro en cualquier lugar de la hoja (punto B). Nota: La unión de estos dos puntos no puede ser una reta horizontal ni vertical.	
3° Paso: Se halla las coordenadas del punto B, de la siguiente manera:	
4° Paso: Toma la bola de icopor y ubica el punto A sobre la línea naranja	

5° Paso: Desde el punto A nos trasladamos hacia la derecha o izquierda los centímetros hallados en el 3° Paso	
6° Paso: Desde el punto encontrado en el 5° Paso nos trasladamos hacia arriba o abajo los centímetros hallados en el 3° Paso	
7° Paso: Con la ayuda de una regla o del hilo calcula la distancia entre los dos puntos, tanto en la cuadricula como en la bola de icopor. ¿Será que la distancia entre los puntos A y B son iguales tanto en 2D (cuadricula rectangular) como 3D (esfera)? ¿Cuál es la diferencia entre las dos medidas?	 

Fuente: elaboración propia.

Técnica de evaluación: Ejercicio práctico - Registro y prueba escrita, los estudiantes envían las pruebas a Padlet (Llamado 3er Nivel - Distancia entre dos puntos) los resultados de la distancia entre los puntos A y B en la cuadrícula y la bola de espuma de poliestireno.

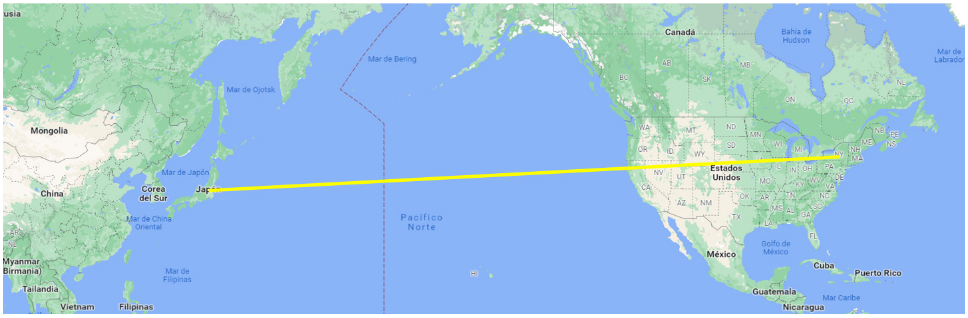
Figura 26. *Padlet distancia entre dos puntos*



Fuente: elaboración propia.

Respuestas de retroalimentación Subnivel 1: *Mapamundi:* Se desarrolla la retroalimentación sobre la distancia entre dos puntos en una superficie esférica, para esto se toman los retos desarrollados en el subnivel 1 y el uso de Google Maps y Earth.

Figura 27. *Retroalimentación distancia entre dos puntos*



Fuente: elaboración propia.

Subnivel 3: Argumentación.

Materiales: Bola de icopor N.° 6 y soporte.

Desarrollo: Los alumnos deben encontrar la figura siguiendo los siguientes pasos.

Figura 28. *Indicaciones triángulos esféricos*

1° Paso: Marca un **punto A** en el en el polo norte de la bola de icopor.
2° Paso: Desplázate 5 cm hacia el sur y marca el **punto B**. Une los puntos A y B
3° Paso: Desde el **punto B** desplázate 8 cm hacia el oeste y marca el **punto C**. Une los puntos B y C, luego los puntos C y A.
4° Paso: ¿Qué figura se forma? ¿Cómo se comportan los ángulos internos del triángulo? ¿Cuáles son las medidas de cada ángulo?

Fuente: elaboración propia.

Técnica de evaluación: Intercambios orales - Diálogo, los alumnos dan su punto de vista en relación con las preguntas anteriores.

Contextualización: Los lados de un triángulo esférico se comportan desde un punto de vista como segmentos rectos; desde otro, son arcos de círculo. Los ángulos internos de cualquier triángulo esférico no suman 180°, la suma puede variar de 180° a 540°.

Subnivel 3: Argumentación

Materiales: Google Earth

Desarrollo: Cada grupo deberá encontrar la figura que se forma al unir las siguientes ciudades o capitales utilizando la aplicación Google Earth y la herramienta para medir superficies y distancias.

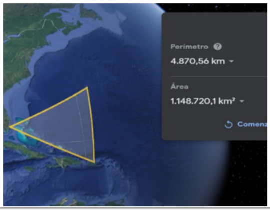
Figura 29. *Unión de ciudades*

La unión de:

- Guadalajara de Buga (Valle del Cauca)
- Florencia.
- Tolima (Caquetá)
- Granada (Meta)

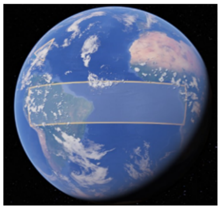
La unión de:

- Miami (Florida)
- San Juan (Puerto Rico)
- Bermudas.



La unión de:

- Bogotá (Colombia)
- Camerún (África)– Bertoua
- Angola (África)- Lubango
- Nasca (Perú)



Fuente: elaboración propia.

Técnica de evaluación: ¿Qué he aprendido? Finalización de la Rutina de pensamiento.

Desarrollo: Cada grupo debe rellenar las columnas restantes, ¿Qué quiero saber? ¿Qué he aprendido?

Criterios de evaluación:

- El alumno debatirá, con lenguaje asertivo, con sus compañeros sobre su postura ante los retos sobre la distancia entre ciudades.
- El alumno debatirá sobre las respuestas y procedimientos realizados en cada uno de los retos.
- El alumno participará activamente en cada actividad y entregará sus pruebas.
- El alumno mostrará actitudes favorables hacia la actividad y valorará el aporte del conocimiento de sus compañeros.

4to Nivel: Topología

Objetivo de Aprendizaje:

- Identificar la diferencia del término igualdad en geometría euclidiana y topología.
- Explorar transformaciones topológicas en diferentes entornos utilizando plastilina, cuerdas, lazos y láminas.

Para el desarrollo del Nivel 4 se divide en dos momentos: Desafíos y Evaluación de conocimientos.

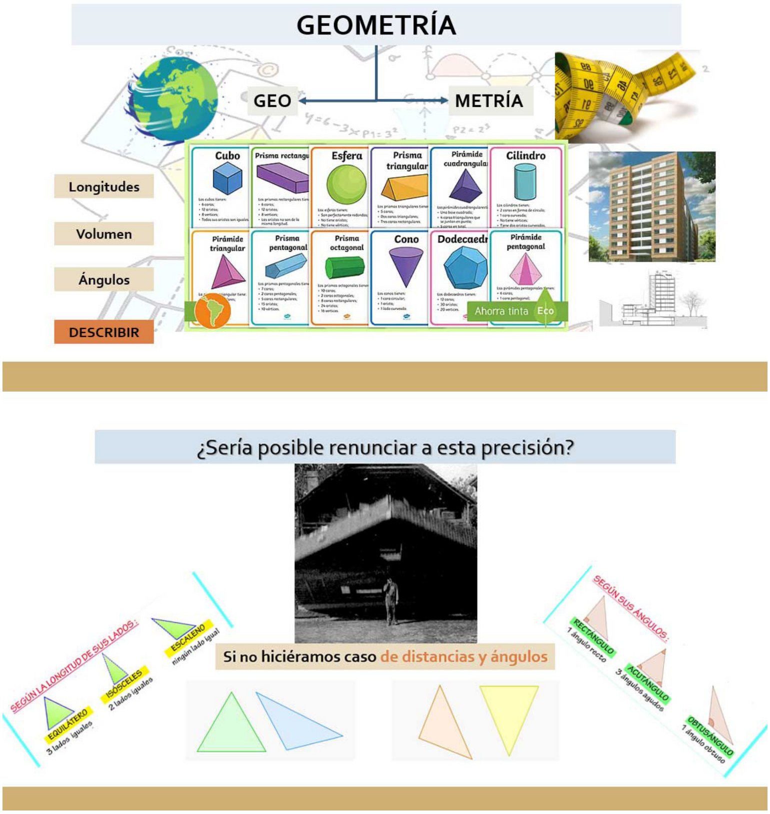
Momento 1: Desafíos.

Antecedentes: ¿Qué es la Geometría?

La etimología de la palabra geometría proviene del griego GEO que significa tierra y METRY que significa medida. Además, es una rama de las matemáticas, que se ocupa del estudio de las formas, medidas, posiciones y propiedades de las figuras planas o del espacio.

Por otro lado, se tiene que las proporciones, medidas y posiciones que tiene cada uno de los objetos entre sí son muy importantes, ya que permite la descripción del objeto del que se está hablando, son como los trazos de un plano que definen la apariencia del edificio (Mark, 2020).

Figura 30. *Retroalimentación concepto geometría*



Fuente: elaboración propia.

Antecedentes: Diferencia en la definición de igualdad.

Figura 31. *Retroalimentación diferencia en la definición de igualdad*

Geometría Euclidiana	Topología
De una manera intuitiva podemos afirmar que dos cuerpos **geométricos son "el mismo"** si pueden transformarse uno en el otro a través de isometrías, esto es respetando las medidas de ángulo, área y volumen.	En **topología**, el concepto de **"igualdad"** entre dos cuerpos es mucho más laxo: es posible retorcer, doblar, estirar, encoger las figuras como si fueran de "plastilina", pero no está permitido romperlas ni pegarlas.

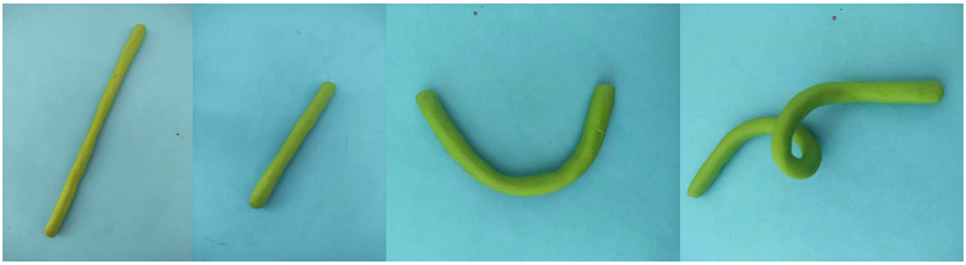
Fuente: elaboración propia.

Subnivel 1: Representación e interpretación.

Un mundo de plastilina

Pregunta desencadenante: Si no prestaras atención a las distancias y los ángulos que sucedería con estos segmentos.

Figura 32. *Retroalimentación diferencia en la definición de igualdad*



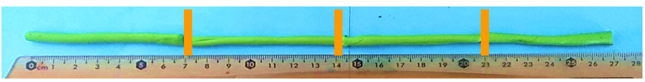
Fuente: elaboración propia.

¿Todos los números anteriores se considerarían iguales?

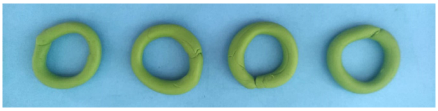
Materiales: Una barra de plastilina y una regla.

Desarrollo:

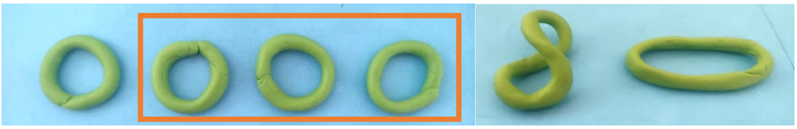
Tabla 7. *Reto transformación de una circunferencia*

1° Paso: Toma la barra de plastilina, moldéela sobre una superficie plana con la ayuda de los dedos forma un cilindro. Nota: intenta que el grosor quede uniforme 
2° Paso: Mida el cilindro y divídalo en 4 partes iguales. 

3° Paso: Construya con cada uno de los segmentos circunferencias.



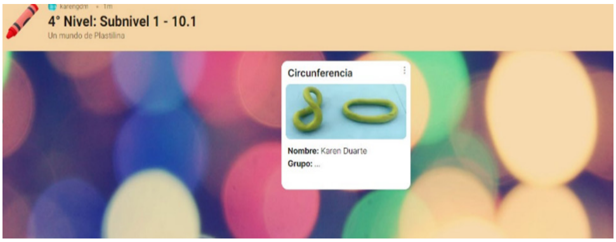
4° Paso: Utiliza tres circunferencias y modifícalas para que cambie su apariencia.
Tenga en cuenta que después de las transformaciones las cuatro figuras tienen que ser circunferencias.



Fuente: elaboración propia.

Técnica de Evaluación: Ejercicio Práctico - Registro, los alumnos deberán subir a Padlet (Llamado: 3°-A mundo de Plastilina) las respectivas evidencias para el subnivel 1.

Figura 33. *Padlet transformaciones circunferencia*



Fuente: elaboración propia.

Contextualización: Reglas.

No será válido cortar las figuras ni pegar partes de ellas.

Figura 34. *Transformaciones incorrectas de una circunferencia*

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 1: Un segmento recto puede ser igual a la letra U, pero distinto de un círculo.

Figura 35. *Transformación de un segmento*

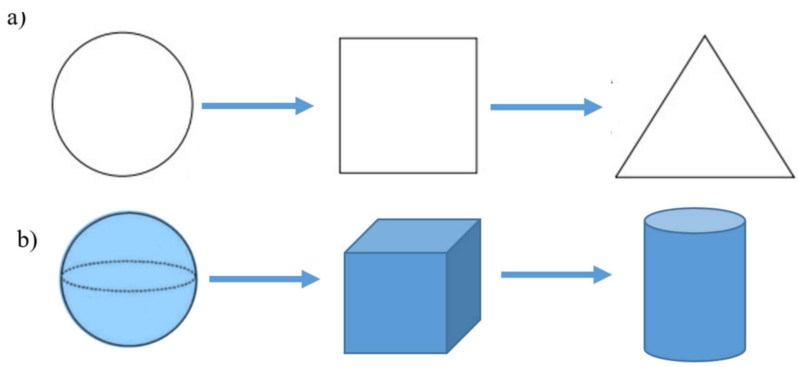
Fuente: elaboración propia.

Esto se debe a que, para obtener una circunferencia a partir de un segmento, tendríamos que pegar sus extremos.

Ejemplo 2: Identificar la igualdad de figuras.

Desarrollo: Los alumnos deben identificar si se pueden realizar las siguientes transformaciones para que las figuras sean iguales.

Figura 36. *Ejemplos de transformaciones*



Fuente: elaboración propia.

Conclusión: Dos figuras son topológicamente iguales o equivalentes si se pueden transformar de una a otra estirando, encogiendo, curvando, respetando los huecos de su geometría.

Subnivel 2: Formulación y puesta en práctica.

Un mundo de plastilina: Tasa y rosquilla

Materiales: Una barra de plastilina.

Desarrollo: Con ayuda de la plastilina, comprobar si una tasa es topológicamente igual o equivalente a un donut.

Técnica de evaluación: Ejercicio Práctico - Inscripción y examen escrito, los alumnos deberán subir al Padlet (Llamado: 4° Nivel - Un mundo de Plastilina) los respectivos exámenes del subnivel 2.

Figura 37. *Padlet transformación de rosquilla a tasa*

Fuente: elaboración propia.

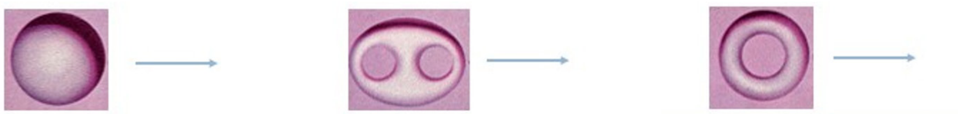
Subnivel 2: Formulación y ejecución

Transformaciones respetando los agujeros de su geometría

Materiales: Una barra de plastilina.

Desarrollo: Con la ayuda de la plastilina los alumnos tienen que modelar transformaciones que respeten los agujeros de los objetos que se muestran a continuación.

Figura 38. *Reto - Objetos para transformar*



Fuente: elaboración propia.

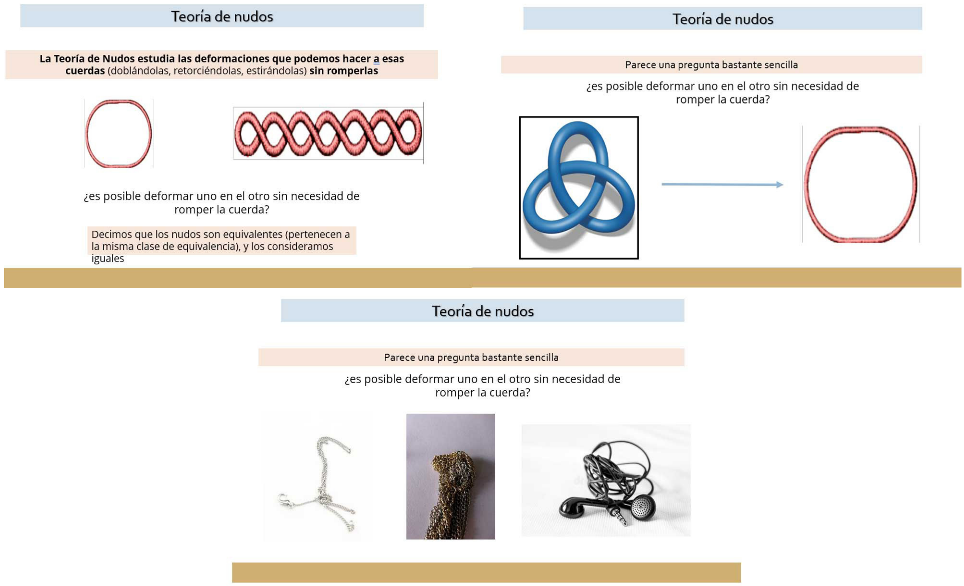
Subnivel 3: Argumentación

Contextualización: Nudos.

A lo largo de los años, los nudos han estado presentes en todas las civilizaciones y culturas. Por ejemplo, se utilizan en nudos decorativos, nudos forestales o marítimos, nudos en procesos quirúrgicos, en bungee, en paracaídas, etc. (Morales, 2020).

Nudo matemático: Un nudo matemático es una cuerda que ata sus dos extremos.

Figura 39. *Contextualización transformaciones en nudos*



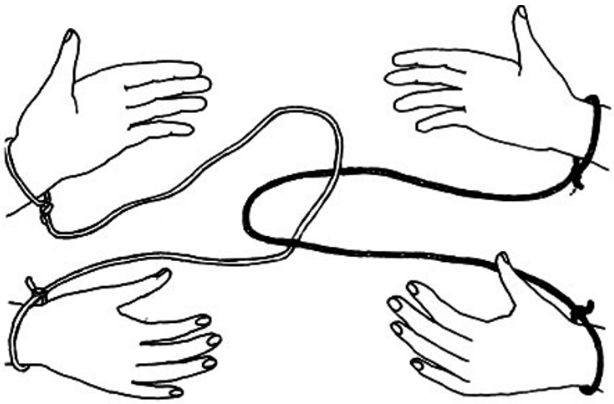
Fuente: elaboración propia.

Cuerdas de asistencia

Materiales: 2 escurridores de 90 cm de longitud cada uno.

Desarrollo: Dos miembros de cada grupo tienen una cuerda atada a sus muñecas y entrelazadas entre sí como se muestra a continuación.

Figura 40. *Reto cuerdas*



Fuente: elaboración propia.

Los miembros del grupo tienen que encontrar la manera de liberar a sus compañeros.

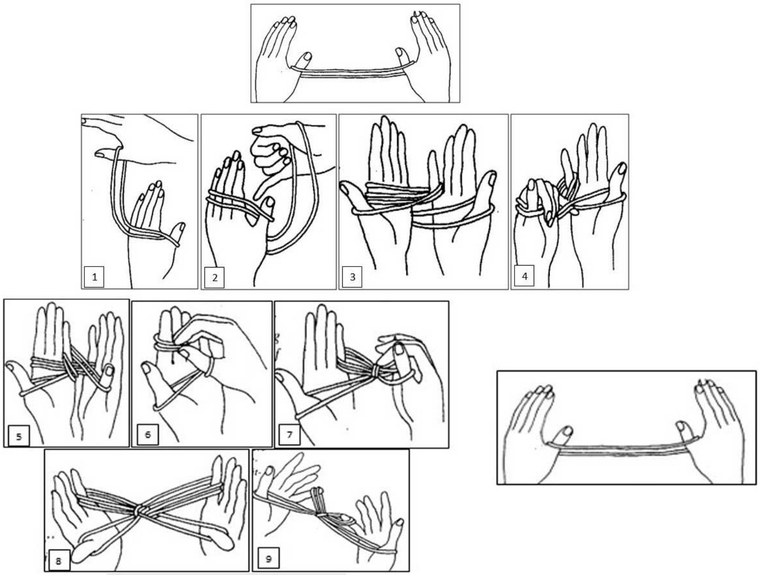
Técnica de evaluación: Intercambios orales y prueba escrita, cada grupo debe escribir los pasos desarrollados para liberar a sus compañeros.

Modo Virtual de la Cuerda

Materiales: Una cuerda de 50 cm de longitud.

Desarrollo: Los alumnos deben seguir cada uno de los pasos que se describen a continuación.

Figura 41. *Reto cuerdas estudiantes virtuales*



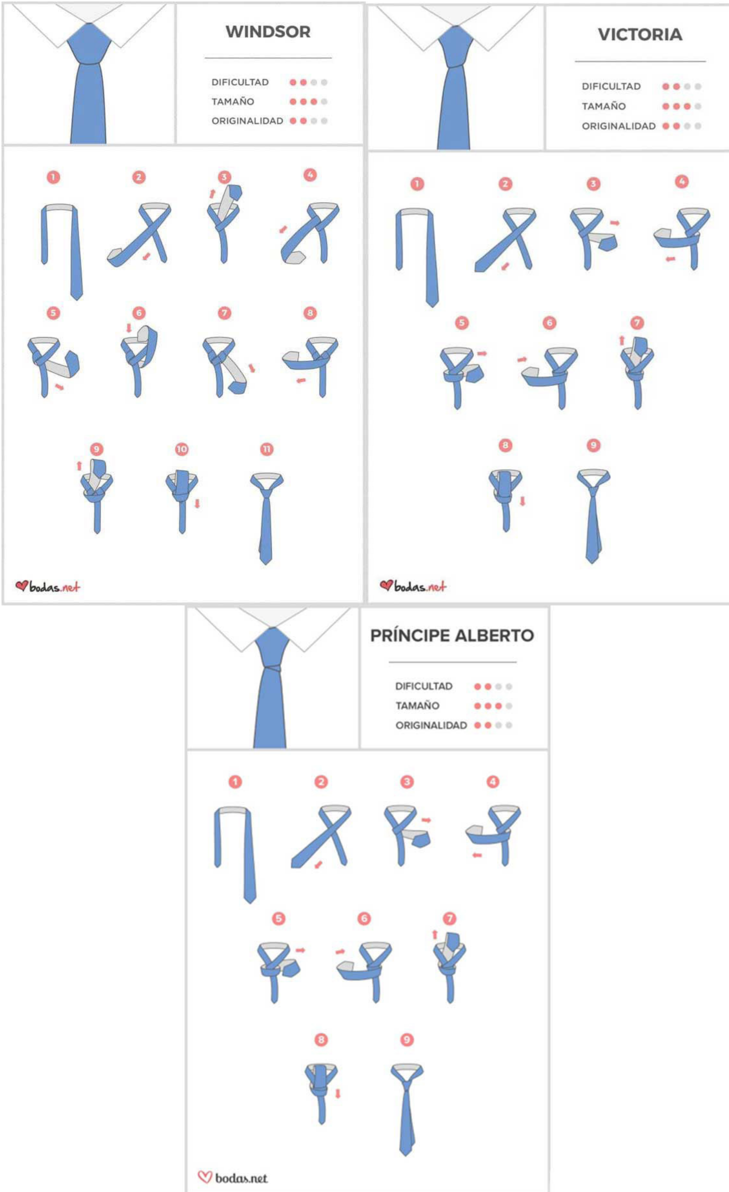
Fuente: elaboración propia.

Nudos en corbatas

Materiales: Un nudo de corbata para cada alumno.

Desarrollo: Cada uno de los grupos empareja al azar una imagen de un nudo de corbata Figura 42, el objetivo es encontrar la forma de modelar el nudo correspondiente en la corbata.

Figura 42. *Reto nudo de corbatas*



Fuente: elaboración propia.

Técnica de evaluación: Ejercicio práctico-Inscripción.

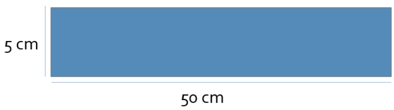
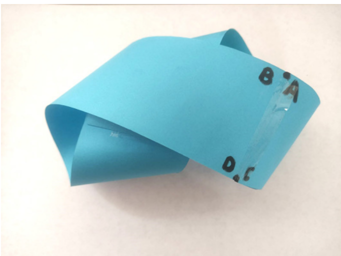
Subnivel superior:

Construcción de nuevas superficies

Materiales: Una hoja de papel y cinta adhesiva o pegamento.

Desarrollo: La construcción de la cinta de Möbius es desarrollada por los alumnos mediante la lectura de imágenes o enunciados.

Tabla 8. *Reto cinta de Möbius*

1° Paso: 	2° Paso: 
3° Paso: Une los vértices A con D y C con D Pista: Sujeta ambos extremos con las manos, dale un medio torsión y adhiere con cinta los extremos cortos, A en D y B en C para que la flecha en el diagrama apunte en la misma dirección. Ahora ya tienes una banda de Mobius. 	4° Paso: Ahora toma un lápiz y, empezando desde cualquier lugar, traza una línea siguiendo toda la extensión de la cinta, hasta llegar de regreso a tu punto de partida. 

Fuente: elaboración propia.

Técnica de evaluación: Intercambios orales, los alumnos tendrán que argumentar las respuestas a las siguientes preguntas: Qué ocurre con la cinta de Möbius cuando se corta su anchura por la mitad, y después con la nueva cinta de Möbius ¿Qué ocurrirá si se vuelve a cortar la anchura de la cinta por la mitad?

Momento 2: Evaluación de los conocimientos

Técnica de evaluación: Intercambios orales, se construirá una lluvia de reflexiones sobre: ¿Qué es la Topología?

Criterios de evaluación:

- El alumno realizará varias transformaciones teniendo en cuenta las reglas topológicas.
- El alumno participará activamente en cada uno de los retos y entregará las actividades respectivas en Padlet.
- El alumno discutirá las respuestas o procedimientos llevados a cabo en el desarrollo de los diversos retos de cada nivel.

5to Nivel: Teoría de Grafos

Objetivos de aprendizaje:

- Emplear diversas estrategias para encontrar recorridos o caminos mínimos por medio del geoplano.
- Interpretar el teorema de los cuatro colores por medio de la construcción y coloreado de un país.

Para el desarrollo del 5° Nivel se divide en dos momentos: Retos y Evaluación de conocimientos.

Momento 1: Retos

Subnivel 1: Representación e interpretación.

Facebook

Desarrollo: años después de terminar el colegio, María quiere organizar un reencuentro con ocho de sus excompañeras, sin embargo, no tiene el teléfono de ninguna de ellas. Recurre a Facebook, donde encuentra el perfil de Catalina, a partir del cual establece las siguientes conexiones:

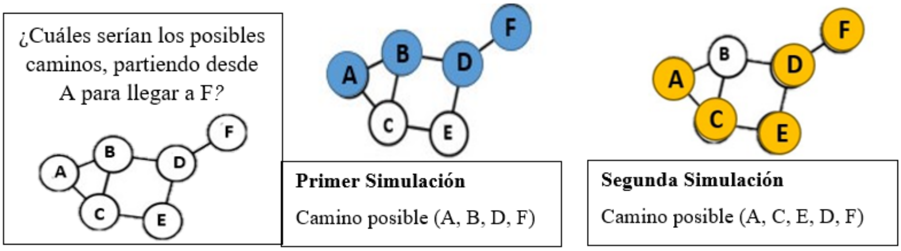
- Catalina es amiga de Laura y Luz Marina.
- Laura también es amiga de Cecilia y Andrés.
- Luz Marina es hermana de Sofía; Sofía y Andrés están saliendo, así que los tres son amigos en Facebook.
- Cecilia es amiga de Kevin y Andrés; Kevin no es amigo de nadie más.
- Marcos no tiene perfil en Facebook (Gutiérrez, 2020).

Técnica de evaluación: Ejercicio práctico - grabación e intercambios orales. Los grupos deben representar la red de amigos y ¿cuántos amigos tiene cada uno en Facebook dentro de esa red de amigos?

Contextualización Teoría de Grafos: Esta teoría busca representar visualmente la relación o unión que puede tener una cantidad de datos, representándolos en forma de puntos, nodos o vértices, y las uniones a través de aristas. Esta representación permite una mayor facilidad en el análisis de grandes cantidades de datos.

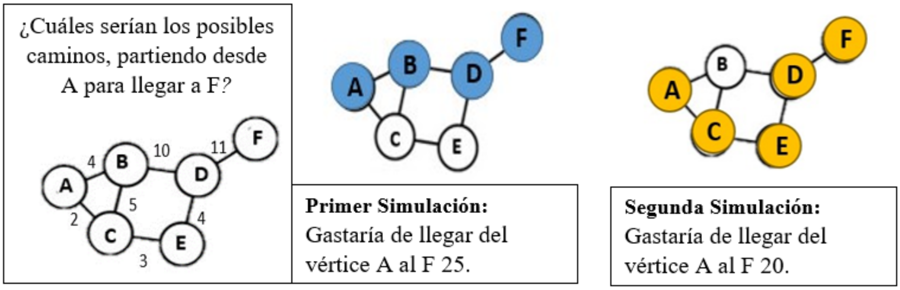
Caminos mínimos: Se basa en encontrar el camino o caminos mínimos de un grafo.

Figura 43. *Contextualización caminos mínimos-aristas sin peso*



Fuente: elaboración propia.

Figura 44. *Contextualización caminos mínimos-aristas con peso*



Fuente: elaboración propia.

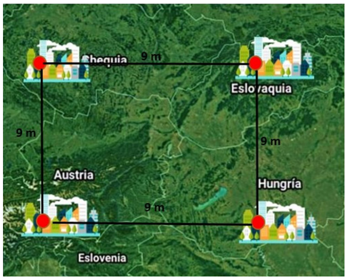
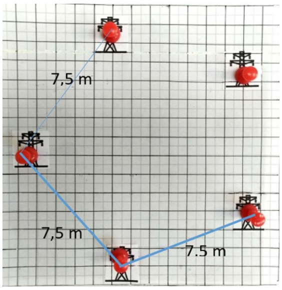
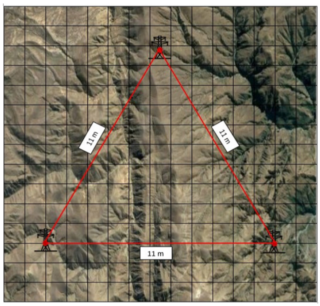
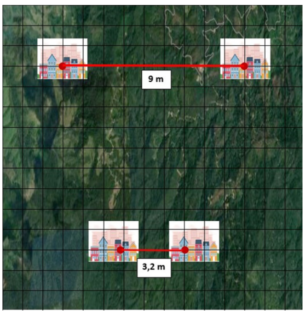
Subnivel 2: Formulación y aplicación.

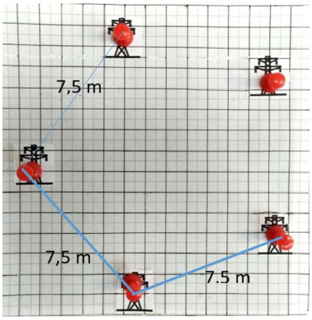
Caminos o recorridos mínimos geoplano

Materiales: Geoplano, chinchetas y cauchos.

Desarrollo: Cada uno de los grupos recibe al azar uno de los problemas que se señalan a continuación.

Tabla 9. *Reto caminos y recorridos mínimos*

Problema 1: Hay cuatro ciudades que serán conectadas por un servicio de transporte aéreo, llamado Teleférico. La empresa encargada en realizar esta construcción quiere ejecutar esta conexión con el menor recorrido de cableado posible para reducir los costos. ¿Cuál será la conexión entre estas ciudades, para que la longitud del cable del Teleférico sea la mínima? Modelizase dos posibles conexiones y del valor de la longitud del cable gastado. Tenga en cuenta que la longitud de las ciudades conectadas vertical y horizontalmente tiene una distancia de una a la otra es de 9 metros, como se muestra en la imagen.	
	Problema 2: Se quiere conectar el cableado de la señal de tele cable de cinco ciudades que se encuentran situadas en forma de pentágono, ¿Cuánto cableado será el mínimo mara unir las cinco ciudades? Modelice dos posibles uniones y del valor del cableado utilizado. Tenga en cuenta que la medida de cada lado de pentágono es de 7,5 m.
Problema 3: Se quiere conectar el cableado de la señal de tele cable de tres ciudades que se encuentran situadas en forma de triángulo, ¿Cuánto cableado será el mínimo mara unir las tres ciudades? Modelice dos posibles uniones y del valor del cableado utilizado. Tenga en cuenta que la medida de cada lado del triángulo es de 11 m.	
	Problema 4: Hay cuatro ciudades que serán conectadas por un servicio de transporte aéreo, llamado Teleférico. La empresa encargada en realizar esta construcción quiere ejecutar esta conexión con el menor recorrido de cableado posible para reducir los costos. ¿Cuál será la conexión entre estas ciudades, para que la longitud del cable del Teleférico sea la mínima? Modelizase dos posibles conexiones y del valor de la longitud del cable gastado. Tenga en cuenta que las longitudes de las ciudades como se muestra la imagen.

Problema 5: Se quiere conectar el cableado de la señal de tele cable de cinco ciudades que se encuentran situadas en forma de pentágono, ¿Cuánto cableado será el mínimo mara unir las cinco ciudades? Modelice dos posibles uniones y del valor del cableado utilizado. Tenga en cuenta que la medida de cada lado de pentágono es de 7,5 m.	

Fuente: elaboración propia.

Con la ayuda del geoplano correspondiente a cada uno de los problemas, los grupos deberán modelar las conexiones mínimas posibles entre las ciudades o antenas utilizando cauchos.

Técnica de evaluación: Ejercicio práctico - grabación e intercambios orales. Los grupos deben socializar cuál de las conexiones posibles entre ciudades o antenas será la mínima, también deben representar en una hoja los modelos realizados en el geoplano y cuánto cableado se utilizó.

Contextualización: Superficies jabonosas.

> Una pompa de jabón se forma cuando una fina capa de agua queda entre dos finas capas de jabón o detergente. Por lo que el detergente es una sustancia que disminuye la tensión y permite que una capa de agua pueda estirarse, debilitando las fuerzas intermoleculares entre sus partículas. (mjalmagro71, 2018)

¿Por qué creen que las pompas de jabón son esféricas?

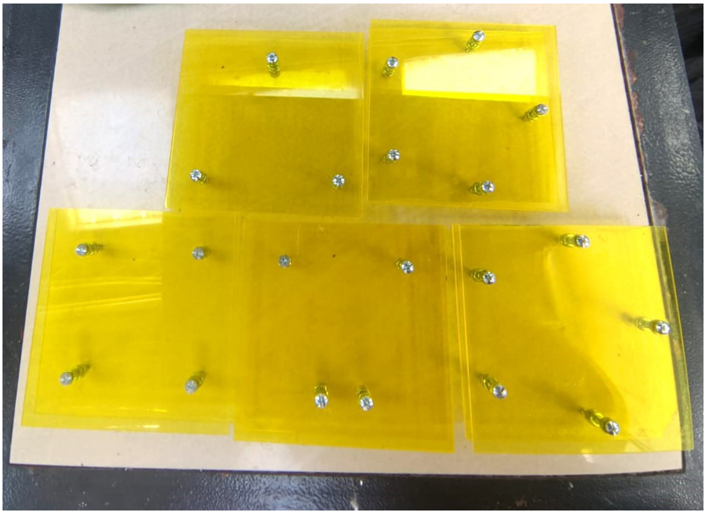
Subnivel 3: Argumentación.

Caminos o recorridos mínimos superficies jabonosas modalidad presencial

Materiales: tarjetas para cada problema y jabón.

Desarrollo: cada grupo pasa la plaqueta correspondiente a cada problema.

Figura 45. *Plaquetas de cada problema*



Fuente: elaboración propia.

A continuación, los alumnos introducen las plaquetas en jabón líquido y observan el cableado mínimo utilizado en la unión de las antenas o ciudades.

Técnica de evaluación: Intercambios orales. Los grupos deberán socializar cuál de las posibles uniones

Subnivel 2: Formulación y puesta en práctica.

Caminos o rutas mínimas para los alumnos en la modalidad virtual.

Materiales: Fotocopia del mapa de Colombia, regla y bolígrafos.

Desarrollo: Cada uno de los estudiantes debe marcar en el mapa mediante un punto o nodo las ciudades que le gustaría visitar (máximo 15).

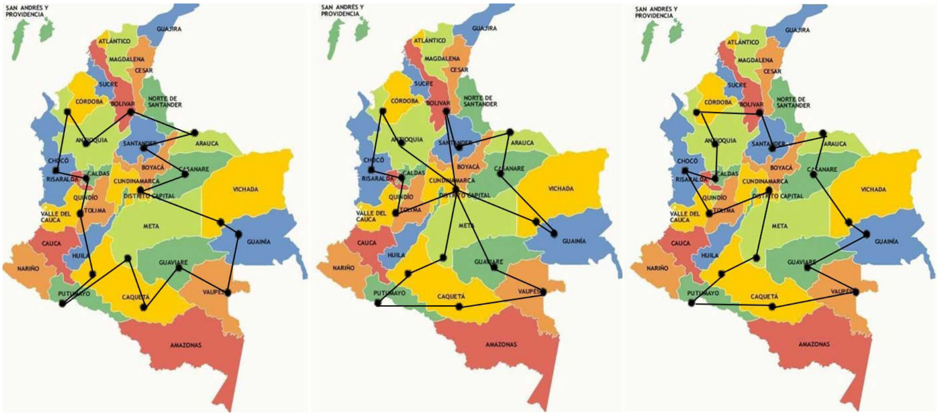
Figura 46. *Ejemplo ubicación de puntos, reto caminos o recorridos mínimos*

Fuente: elaboración propia.

El objetivo es visitar todas las ciudades marcadas en el mapa una sola vez. ¿Cómo se puede hacer esto, cuál crees que es el camino más corto?

Los alumnos deben generar diferentes esquemas que crean que serán los caminos más cortos para visitar todas las ciudades que desean visitar en el menor tiempo posible.

Figura 47. *Ejemplo unión Ciudades, reto caminos o recorridos mínimos*



Fuente: elaboración propia.

Técnica de evaluación: Ejercicio práctico - Registro e intercambios orales. Los alumnos deben medir la distancia entre vértices para hallar la medida de cada una de las aristas. Luego deberán calcular el valor del camino para cada modelo, esto se hará sumando las medidas de cada arista. Finalmente, se socializarán las distancias obtenidas para mostrar cuál será el modelo con el mínimo recorrido.

Figura 48. *Ejemplo medida de aristas, reto caminos o recorridos mínimos*

Fuente: elaboración propia.

Subnivel 3: Formulación e implementación

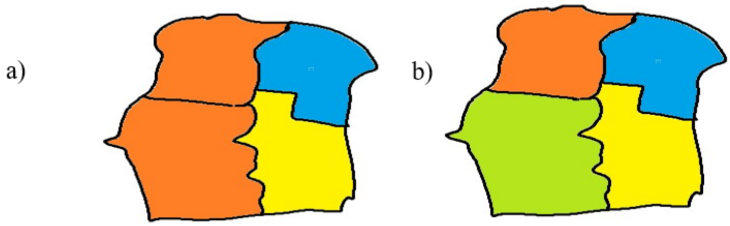
Teorema de los cuatro colores

Materiales: Una hoja de papel y cuatro colores diferentes.

Desarrollo: Cada uno de los alumnos inventará el nombre de un país y su contorno. Después deberán dividir el país en departamentos, al menos 15.

Por último, tienen que colorear con los cuatro colores cada uno de los departamentos teniendo en cuenta que no puede haber dos departamentos contiguos o que compartan frontera con el mismo color.

Figura 49. *Teorema de los cuatro colores*



Fuente: elaboración propia.

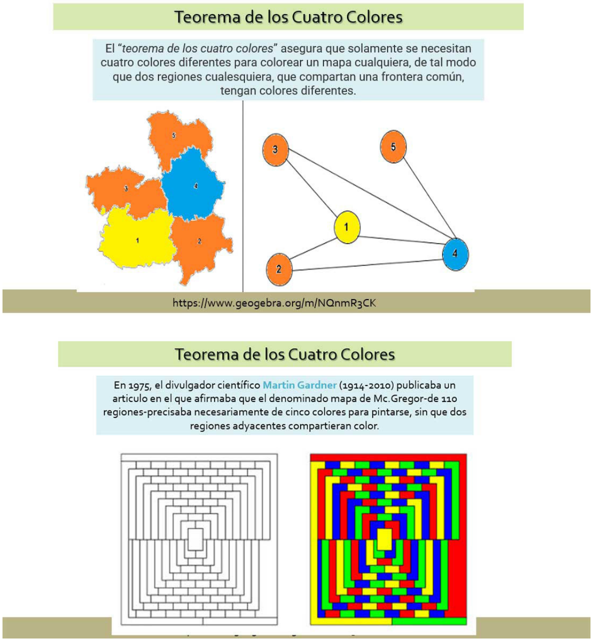
Nivel superior

Materiales: https://www.geogebra.org/m/NQnmR3CK

Desarrollo: Los alumnos tienen que colorear el mapa de McGregor, que tiene 110 regiones, teniendo en cuenta la condición de coloreado.

Retroalimentación:

Figura 50. *Retroalimentación teorema de los cuatro colores*



Fuente: elaboración propia.

Criterios de evaluación:

- El alumno demostrará actitudes favorables hacia la actividad y valorará la aportación de los conocimientos de sus compañeros en la resolución de los distintos retos
- El alumno utilizará estrategias para conseguir el camino o recorrido mínimo en el problema asignado.
- El alumno mostrará actitudes favorables hacia la actividad y valorará el aporte del conocimiento de sus compañeros.

Capítulo 2

Implementación del juego

Los escenarios gamificados se aplican a través de una serie de cinco niveles en cada uno de los cuales se trabajan los temas de matemáticas avanzadas: teselaciones, fractales, geometría esférica, topología y teoría de grafos. Así, el desarrollo de la aplicación de cada nivel a través de los cursos 10.1 y 10.2 se muestra a continuación.

1er nivel: Teselados

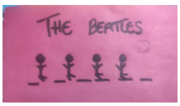
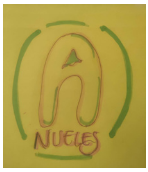
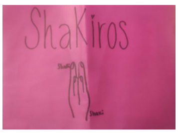
Se inicia con la contextualización en relación con los elementos del juego.

Figura 51. *Elementos del juego: búsqueda de profesiones*

Fuente: elaboración propia.

Seguidamente, se formaron los seis grupos para cada uno de los cursos.

Tabla 10. *Nombre y logo por grupo*

10.1		10.2	
NOMBRE DEL GRUPO	**LOGO**	**NOMBRE DEL GRUPO**	**LOGO**
Karol Gigos		Harry Potter	
Los Tiburonsin		Will Smith	
Las Yasuris Yamileth		Los Backyardigans	
The Beatles		Anueles	
Shakiros		SCP	
Virtual		Virtual	

Fuente: elaboración propia.

Resolución de retos

Subnivel 1: loseta

A nivel de representación e interpretación, abarca la construcción de fichas o figuras a través de polígonos. A cada uno de los grupos se le asignó aleatoriamente una de las representaciones de la Tabla 1.

Después de la asignación, cada grupo recibió los materiales correspondientes; polígono y teja o figura con las medidas precisas, para lograr mediante deformaciones o simetrías en el polígono.

Durante la construcción de la loseta, los grupos tuvieron la opción de pistas o ayudas para facilitar el proceso de obtención de la figura.

Conclusiones: en la sección de los dos cursos, los miembros de los grupos se mostraron muy participativos y estratégicos para encontrar la baldosa deseada. Para ello, no recurrieron a las pistas disponibles, sino que el profesor desarrolló espacios colaborativos a través de preguntas como:

- Si se superpone la figura al polígono, ¿qué se observa?
- Los espacios sobrantes en la superposición, ¿qué parecido tienen con partes de la figura o baldosa que hay que construir? ¿Qué simetrías se observan?

El objetivo de las preguntas era que los alumnos comprendieran la dinámica del reto.

Figura 52. *Unión de ciudades*

Fuente: elaboración propia.

Los grupos del curso 10.1, fueron muy estratégicos en el desarrollo de los análisis relativos a las isometrías y cortes desarrollados para este fin.

Por lo tanto, con la ayuda de los espacios de retroalimentación, no hubo fallas en las construcciones.

Figura 53. *Contracciones de los grupos*

Fuente: elaboración propia.

Algunos grupos de 10.2 fueron poco analíticos en cuanto a las isometrías y cortes a realizar. Por lo tanto, se encontraron algunas deficiencias, ya que no analizaron cada una de las isometrías presentes y solo se dispusieron a cortar sin ninguna guía para lograr la figura deseada.

Figura 54. *Losetas mal construidas por los grupos*

Fuente: elaboración propia.

Después de las correcciones y espacios colaborativos, los resultados fueron:

Figura 55. *Contracciones de los grupos*

Fuente: elaboración propia.

Subnivel 2: Mosaico o teselado

En el subnivel de formulación y ejecución se intentó crear un mosaico o teselado, mediante la repetición de la tesela correspondiente por cada uno de los grupos.

Cada grupo disponía de dos hojas de papel silueta, con estas hojas debían eliminar el mayor número de teselas posibles, utilizando todo el papel al máximo.

Conclusiones: en esta actividad se observó la colaboración del equipo para primero completar el reto y obtener las letras para conformar la profesión que caracteriza al 1er nivel.

Las deficiencias presentes en ambos cursos fueron la ausencia de material (tijeras y cinta adhesiva) que cada uno de los integrantes del grupo debía traer, esto ocasionó que algunos equipos tuvieran inconvenientes para realizar los mosaicos.

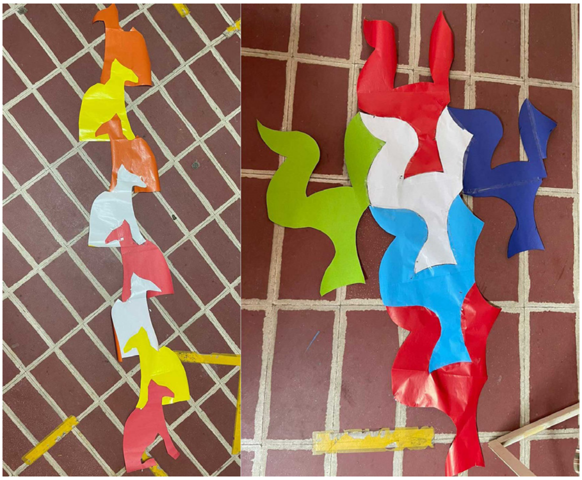
Algunos grupos fueron muy ordenados y utilizaron al máximo el papel. Los alumnos que no disponían de los materiales estaban dispuestos a ayudar a su equipo utilizando otras herramientas, como la regla en lugar de las tijeras.

Figura 56. *Contracciones de mosaicos por grupo*

Fuente: elaboración propia.

Debido a la falta de materiales de algunos miembros de los grupos, la construcción del mosaico paso a manos solo de aquellas personas que, si traían los materiales, ante esta situación los grupos fueron penalizados con el retiro de las tarjetas.

Figura 57. *Contracciones de mosaicos por grupo*



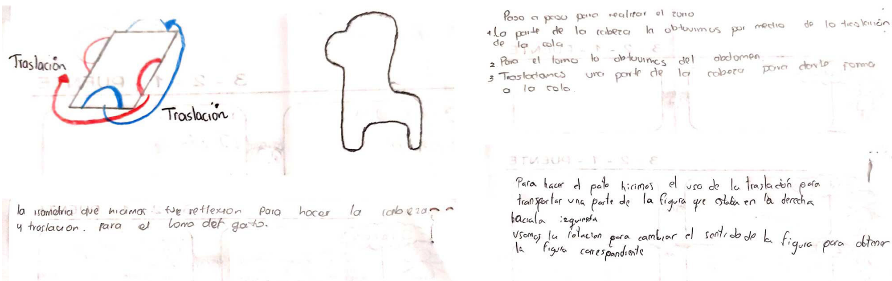
Fuente: elaboración propia.

Subnivel 3: Argumentación

En la fase de argumentación, cada uno de los grupos tuvo que describir los elementos simétricos utilizados para obtener el mosaico.

Conclusiones: algunos de los grupos fueron muy descriptivos, narrando las isometrías realizadas, utilizando recursos visuales y otros a través de pasos, mostrando la comprensión de las isometrías realizadas.

Figura 58. *Argumentación de Isometrías*



Fuente: elaboración propia.

Proceso de comprensión

Para el proceso de comprensión de los conceptos del tema teselados trabajados en este nivel, se implementaron actividades en los espacios de contextualización y una rutina de pensamiento al inicio y al final del nivel.

Actividades de contextualización

Actividad N.° 1: Inicio, para la comprensión del tema de teselados fue necesario tener claridad sobre el concepto de isometrías. La explicación se realizó a través de construcciones para cada isometría; traslación, rotación y simetría o reflexión.

La actividad de comprensión se desarrolló a través de la construcción de un mosaico, utilizando las isometrías visualizadas y el modelo de la Figura 59.

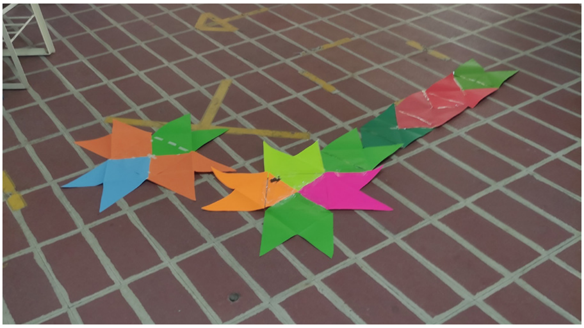
El reto de 10.1 era desarrollar un mosaico mediante traslaciones.

Figura 59. *Traslación*

Fuente: elaboración propia.

El reto de 10.2 fue desarrollar un mosaico a través de rotaciones.

Figura 60. *Rotación*



Fuente: elaboración propia.

El reto fue cumplido por todos los grupos sin ningún inconveniente, dando en evidencia la comprensión de las isometrías.

Actividad N.° 2: Al final, después de aplicar los tres subniveles, se desarrolló el espacio de preguntas para cerrar el primer nivel.

Preguntas:

- ¿El área del polígono y loseta correspondiente es el mismo?: La mayoría de los grupos de manera intuitiva afirmaron que las áreas eran las mismas debido a que para obtener la loseta o figura debían utilizar toda el área del polígono.
- ¿Será que puedo construir teselados con la utilización de polígonos regulares e irregulares?: Algunos grupos dudaron de esta pregunta, pero otros afirmaban que, si era posible debido que un mosaico podría generarse con cuadros o triángulos. La respuesta anterior se debió ya que asociaban la pregunta con los tipos de embaldosados de sus casas o del salón de clase.
- ¿Será que existirá alguna clasificación de los mosaicos? ¿La clasificación dependerá de que factor?: Esta pregunta genero un poco de confusión

entre los grupos, pero se encasillo a las respuestas del subnivel 3, y las diferentes isometrías realizadas por cada grupo para poder obtener la loseta o figura deseada.

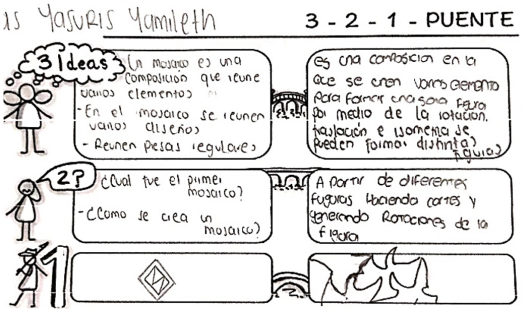
Figura 61. *Explicación del grupo Tiburonsin referente a las isometrías realizadas en la loseta*

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, se socializaron las aplicaciones de los mosaicos y el gran exponente de esta corriente M.C. Escher.

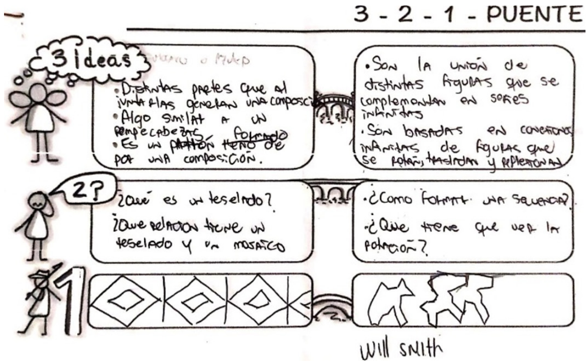
Rutina de pensamiento

Figura 62. *Rutina de pensamiento 10.1 presencial*



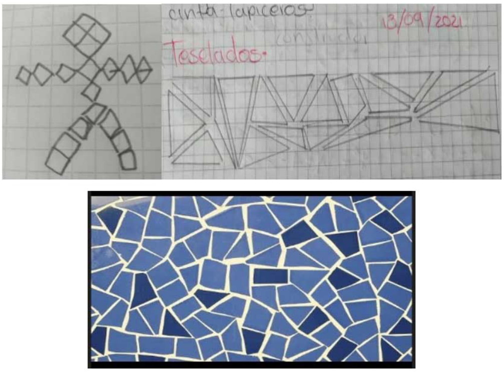
Fuente: elaboración propia.

Figura 63. *Rutina de pensamiento 10.2 presencial*



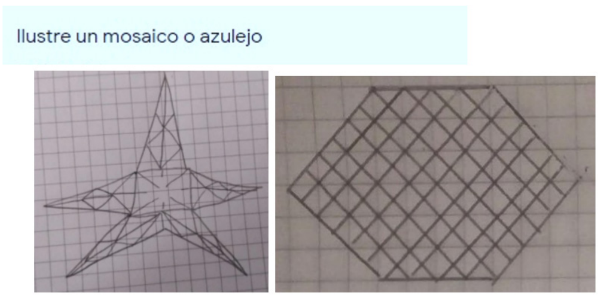
Fuente: elaboración propia.

Figura 64. *Rutina de pensamiento 10.1 virtual*



Fuente: elaboración propia.

Figura 65. *Rutina de pensamiento 10.2 virtual*



Fuente: elaboración propia.

La rutina de pensamiento Puente 3-2-1 se desarrolla para demostrar los conocimientos previos de los alumnos y posteriormente los aprendidos en los retos.

En el diligenciamiento de la rutina de pensamiento de inicio, las respuestas de los grupos respecto a la mención de tres ideas sobre la pregunta ¿Qué es un mosaico o azulejo? lo asociaron con composiciones artísticas geométricas, así como secuencias o uniones de varias figuras. En el segundo recuadro que trataba de mencionar dos preguntas sobre el tema, la mayoría de los grupos escribieron preguntas asociadas a ¿Cómo se construye un mosaico? ¿Cuál es la clasificación de los mosaicos? ¿Y dónde pueden evidenciarse los mosaicos? En la tercera entrada, los grupos ilustraron diferentes mosaicos mediante una figura repetida.

Las respuestas de los alumnos en la rutina de pensamiento final en relación con el primer recuadro fueron unánimes al escribir que un mosaico es la unión o composición de figuras y la construcción se realiza mediante isometrías. En la segunda casilla, las preguntas se dirigieron a la aparición de teselaciones o mosaicos y también a la asociación de patrones. Por último, en el tercer recuadro, algunos grupos, por razones de tiempo, no pudieron terminar sus ilustraciones.

Componente evaluativo

Los componentes evaluativos se realizaron por medio de diversos instrumentos, se aplicó la rutina de pensamiento para evidenciar el conocimiento antes y después del desarrollo de los retos, además de intercambios orales que permitieron la comunicación asertiva entre los integrantes de cada grupo, así como en la socialización grupal en relación con el trabajo realizado y preguntas en el espacio de retroalimentaciones o contextualizaciones.

Por otro lado, también se evaluó el comportamiento de los alumnos frente a la colaboración del equipo y las actitudes favorables frente a las diferentes actividades.

Conclusiones: 1er nivel – teselados

En el curso 10.1 hubo un gran interés por parte de los alumnos por la realización de los retos o dinámicas de los juegos.

Además, es un curso amante de la competición, lo que hace que los espacios de desarrollo de los retos sean muy ruidosos, pero productivos. En el curso 10.2 las dinámicas de juego fueron recibidas con total interés y agrado, esto generó ambientes de trabajo divertidos.

La deficiencia del curso en este primer nivel fue que algunos alumnos no contaban con los materiales, lo que los llevó a no colaborar con su grupo en los diferentes retos.

Las actividades presentes en este nivel llevaron a influir en el interés de los alumnos por el estudio y aplicación de otras ramas. Por ejemplo, al completar este nivel, los alumnos se motivaron a desarrollar baldosas con tapas de botellas derretidas para el *Día de la ciencia*.

Figura 66. *Losetas reciclables*

Fuente: elaboración propia.

Alumnos en la modalidad virtual:

Los retos narrados anteriormente para el encuentro presencial se realizaron en la misma dinámica para los alumnos virtuales, con la diferencia de que los polígonos implementados para la construcción de losetas se realizaron a menor escala.

La asistencia virtual para el curso 10.1 fue de dos alumnos y para el curso 10.2 de ocho alumnos. La deficiencia de los alumnos es la falta de participación y entrega de pruebas.

Profesión de 1er nivel

ARTISTA

La elección de esta profesión se debe a M.C. Escher, exponente del mundo teselado que dio paso al mundo del arte matemático.

Tabla de posiciones: los grupos que completaron la profesión de nivel fueron: 10.1 Los Tiburonsin y 10.2 Los Backyardigans.

Tabla 10. *Tabla posición 1er nivel*

NOMBRE DEL GRUPO 10.1	1° NIVEL
Karol Gigos	✪◖
Los Tiburonsin	✪✪✪
Las Yasuris Yamileth	✪
The Beatles	✪

Shakiros	✪✪
Virtual	✪

NOMBRE DEL GRUPO 10.2	1° NIVEL
Harry Potter	✪✪
Will Smith	✪
Los Backyardigans	✪✪✪
Anueles	✪✪
SCP	✪
Virtual	✪

Fuente: elaboración propia.

2do nivel: Fractales

Duración: 2 sesiones de encuentro virtual

Se comienza recordando la dinámica del juego, como el 2do Nivel se desarrolló de forma virtual mediante la plataforma ZOOM, se pidió a los alumnos que se renombraran en la reunión virtual según el grupo al que pertenecían. Además, debían tener en cuenta la asignación de un emoji, para poder reaccionar cuando finalizasen los retos.

Estas dos estrategias facilitaron la identificación de los grupos que terminaron antes los retos y, por tanto, la entrega de las cartas correspondientes a la profesión en cuestión.

Figura 67. *Identificación encuentro virtual 10.1 y 10.2*

10.1

NOMBRE DEL GRUPO	Identificación de Emoji
Karol_ Nombre	👍
Tiburon_ Nombre	😂
Yasuris_ Nombre	😮
Beatles _ Nombre	❤️
Shakiros_Nombre	👏
Nombre	🎉

10.2

NOMBRE DEL GRUPO	Identificación de Emoji
Potter_Nombre	👍
Smith_Nombre	😂
Backyar_Nombre	😮
Anueles _Nombre	❤️
Nombre	👏
SCP	🎉

Fuente: elaboración propia.

Obtención de letras: Cada grupo empezó con dos letras para competir por las 5 letras que faltaban de la profesión que se estaba jugando.

Resolver retos 10.1 y 10.2

Subnivel 1

En el subnivel de representación e interpretación se realizó el reto de estimar la medida del contorno de la costa de Gran Bretaña.

Reto: ¿Qué longitud tiene la costa de Gran Bretaña?

Cada uno de los alumnos tenía en su casa la fotocopia del contorno de la costa de Gran Bretaña y papel de 1,5 cm y 3,5 cm de ancho.

Se explicó a los alumnos que las tiras de papel serían las tiras de medida para poder estimar la longitud de la costa en la fotocopia. Posteriormente, comenzaron con la estimación utilizando las tiras de 3,5cm de ancho, para ello, se les orientó sobre cómo ubicar cada una de las tiras en el contorno del croquis, sin superponerlas, ni dejar espacios entre ellas.

Figura 68. *Apoyo visual primera estimulación*

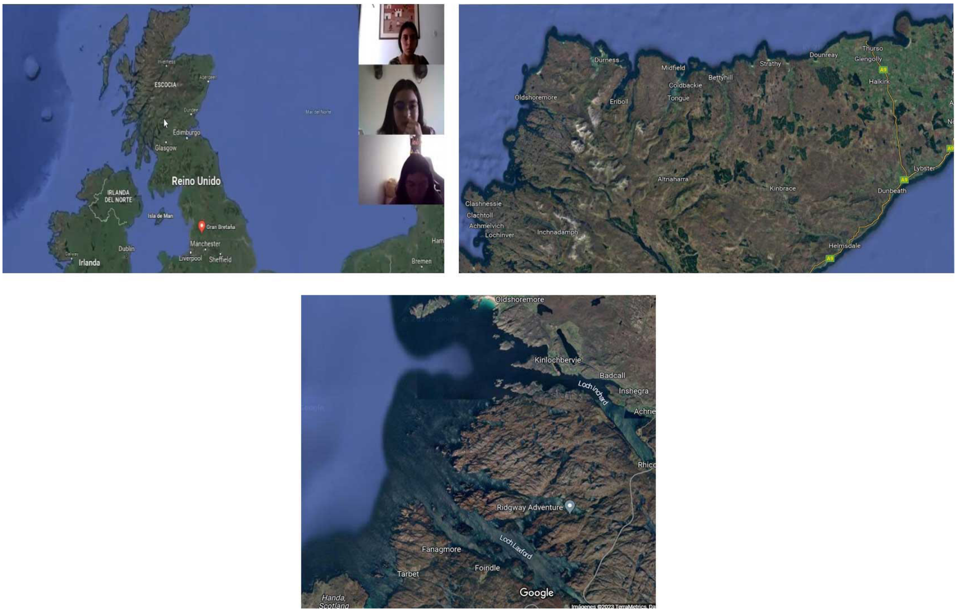
Fuente: elaboración propia.

Los alumnos debían terminar el proceso y anotar el número de tiras utilizadas y la longitud estimada. A continuación, se repitió el mismo proceso para la segunda estimación con las tiras de 1,5 cm de ancho.

Tras realizar las dos simulaciones, se desarrolló el espacio de socialización a través de preguntas como:

- ¿Qué tira de papel dio la estimación más alta de la medida de la costa británica? La mayoría de los alumnos respondieron que la tira que daba la mayor longitud de la línea de costa era la de 1,5 cm.
- ¿Dependerá la longitud de la línea de costa del tamaño de la tira utilizada? Para ayudar a los alumnos a comprender y responder a la pregunta, se utilizó Google Maps para proyectar la línea de costa y mostrar el comportamiento a diferentes escalas de su contorno.

Figura 69. *Costa de Gran Bretaña a diferentes escalas*



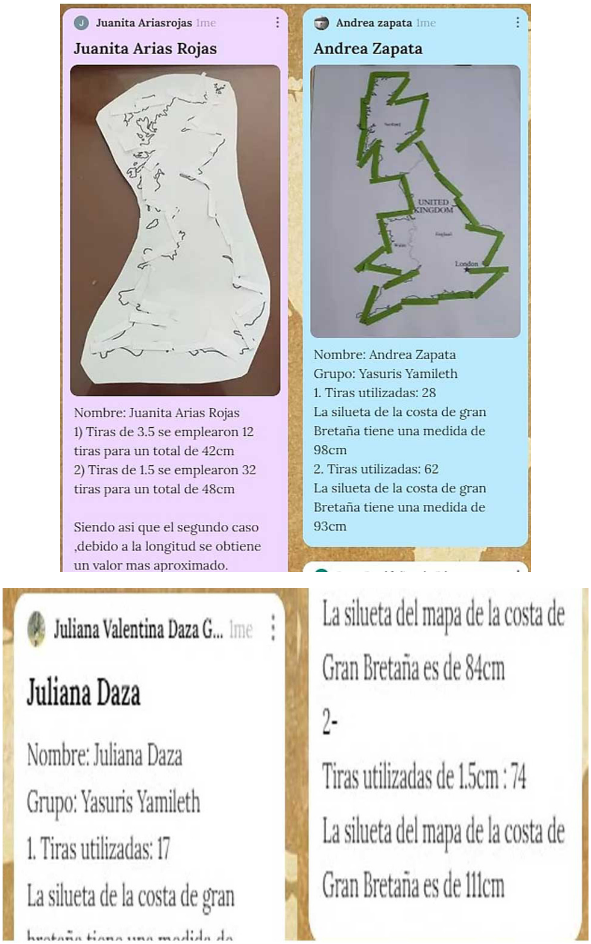
Fuente: elaboración propia.

Con la ayuda anterior los alumnos afirmaron que la longitud de la línea de costa dependía de la franja utilizada, ya que la línea de costa sería más larga cuando se midiera con una regla mucho más pequeña, ya que así se mediría con precisión cada una de las fragmentaciones de la línea de costa.

Conclusiones: El curso 10.1, mostró mayor participación en la entrega de los exámenes, a pesar de la falta de participación de los alumnos en la reunión, por lo tanto, no se desarrolló una buena conexión del diálogo del profesor con los alumnos.

Las evidencias de la mayoría de los alumnos fueron realizadas de forma incompleta, pues no desarrollaron el análisis respecto a las tiras utilizadas y los resultados obtenidos por cada una.

Figura 70. *Evidencias costa de Gran Bretaña 10.1*

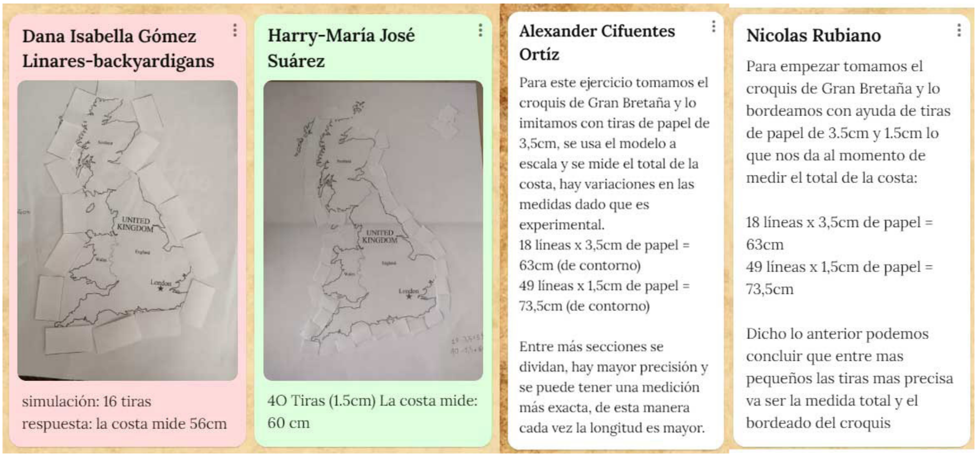


Fuente: elaboración propia.

El curso 10.2 mostró mayor participación y diálogo, pero hubo fallas en la entrega de evidencias para cada una de las simulaciones con las tiras de papel.

Las evidencias entregadas por los estudiantes reflejan comprensión del tema.

Figura 71. *Evidencias costa de Gran Bretaña 10.2*



Fuente: elaboración propia.

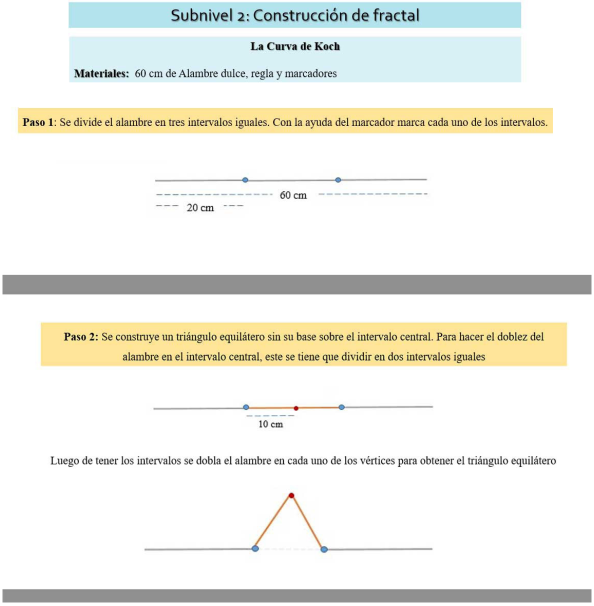
Subnivel 2: Construcción de fractales

En el subnivel de formulación y ejecución se buscó construir fractales utilizando diversos materiales; hilo de caramelo, doblando y cortando una hoja de papel.

Reto 1: La curva de Koch

El primer reto se basaba en la construcción del fractal de la curva de Koch mediante hilo de caramelo. Esta construcción se desarrolló con la ayuda y guía del profesor para seguir los pasos necesarios para obtener el fractal.

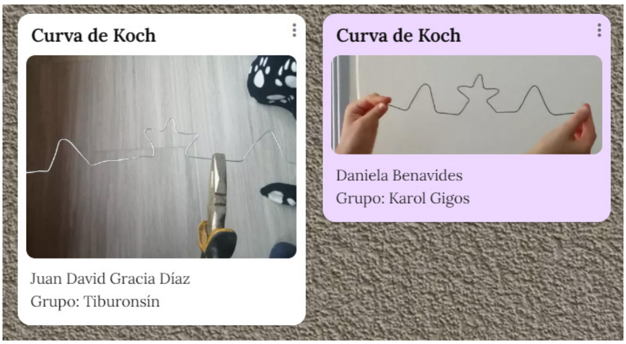
Figura 72. *Apoyo visual construcción de la Curva de Koch*



Fuente: elaboración propia.

Conclusiones: La construcción del fractal en la disciplina 10.1 se desarrolló con dificultad, debido a que el proceso no se concluyó en la reunión virtual, por lo tanto, se dejó de tarea su culminación, pero debido a esto, la gran parte de los estudiantes no entregaron las evidencias.

Figura 73. *Evidencia construcción Curva de Koch 10.1*



Fuente: elaboración propia.

La construcción de la Curva de Koch, en el curso 10.2, se desarrolló con gran éxito, una vez que se alcanzó el tiempo en la reunión virtual para aclarar dudas e inconvenientes.

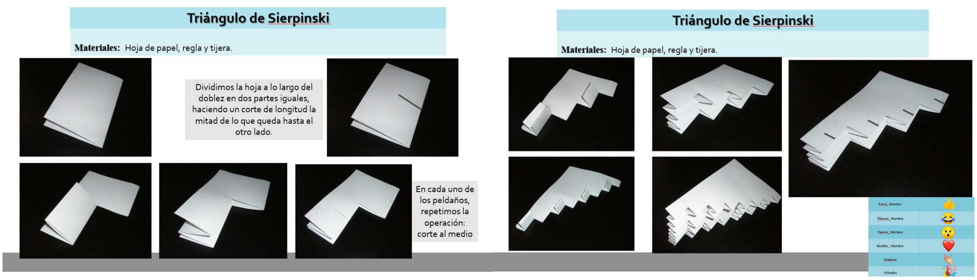
Figura 74. *Evidencia construcción Curva de Koch 10.2*

Fuente: elaboración propia.

Reto 2: Triángulo de Sierpinski

El segundo reto consistió en construir el Triángulo de Sierpinski fractal, esta construcción se realizó mediante la lectura de imágenes. Los materiales necesarios para el reto fueron: una hoja de papel, tijeras, regla y bolígrafo por alumno.

Figura 75. *Apoyo visual Triángulo de Sierpinski*



Fuente: elaboración propia.

Conclusiones: Este reto demostró la capacidad de algunos alumnos para leer imágenes, por lo que no hubo tantos problemas en su construcción.

Durante el desarrollo del reto, algunos alumnos tuvieron dificultades para analizar las sucesivas iteraciones que aparecían en los pasos a realizar, por lo que recibieron ayuda o pistas para comprender el proceso sucesivo que presentaba la construcción del fractal de Sierpinski.

Fue evidente en la ejecución del reto el interés de los alumnos por observar cuál era el aspecto o imagen del fractal que se estaba construyendo.

Figura 76. *Evidencia construcción Triángulo Sierpinski 10.1*

Fuente: elaboración propia.

Figura 77. *Evidencia construcción Triángulo Sierpinski 10.2*

Fuente: elaboración propia.

Subnivel 3: Fractales en la naturaleza

Luego de la contextualización del concepto de fractal, se entregó a cada grupo una de las imágenes de la Tabla 4. Los alumnos debían analizar si la imagen se asociaba a un fractal o no y justificar su respuesta, la evidencia era enviada a Padlet en la columna de la imagen correspondiente por grupo.

Conclusiones: Los alumnos del curso 10.1 tuvieron mayor participación en este reto.

Todos los alumnos afirmaron que la imagen que les correspondía era un fractal, ya que seguían ciertos patrones, similitudes a diferentes escalas, otros afirmaron que se evidenciaban repeticiones consecutivas de ciertos comportamientos. Algunos de los alumnos se apoyaron en ilustraciones para afirmar comportamientos sucesivos.

Figura 78. *Evidencia fractales en la naturaleza 10.1*

Fuente: elaboración propia.

La participación de los alumnos del curso 10.2 fue escasa, e incluso en algunos grupos solo participaron uno o dos miembros.

Los alumnos que participaron afirmaron que la imagen que les correspondía si eran fractales, argumentando que siguen un patrón, cambiando sucesivamente su tamaño a diferentes escalas.

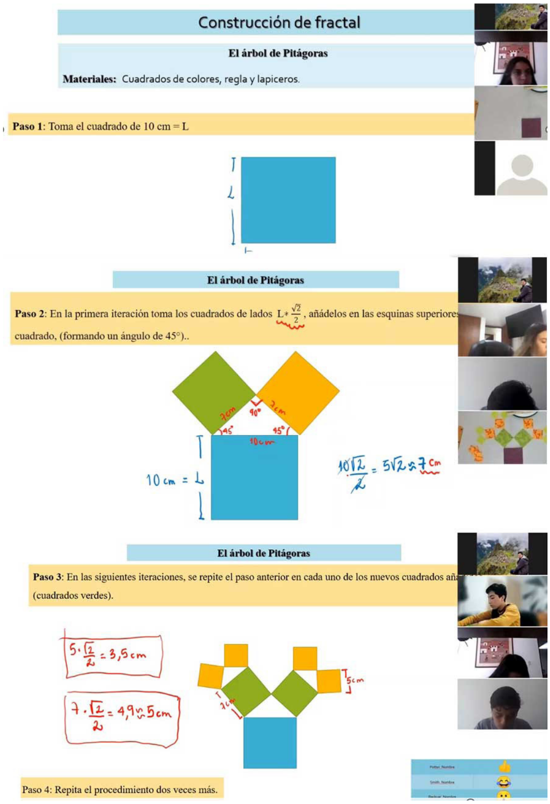
Figura 79. *Evidencia fractales en la naturaleza 10.2*

Fuente: elaboración propia.

Subnivel superior: árbol pitagórico

En este subnivel se abordó la construcción del fractal pitagórico a través de diferentes cuadros, las instrucciones fueron guiadas por pasos con el apoyo del docente. La implementación del subnivel se realizó para ambos cursos.

Figura 80. *Apoyo visual árbol de Pitágoras*



Fuente: elaboración propia.

Conclusiones: La construcción del fractal se realizó sin inconvenientes y los alumnos mostraron actitudes positivas frente a la ejecución del desafío. Además, las explicaciones se centraron en que los alumnos comprendieran el patrón de repetición en las iteraciones utilizando adecuadamente la sustitución en la expresión matemática para saber qué cuadrado se utilizó.

Figura 81. *Evidencia construcción Árbol de Pitágoras 10.1*

Fuente: elaboración propia.

Figura 82. *Evidencia construcción Árbol de Pitágoras 10.2*

Fuente: elaboración propia.

Comprensión del proceso

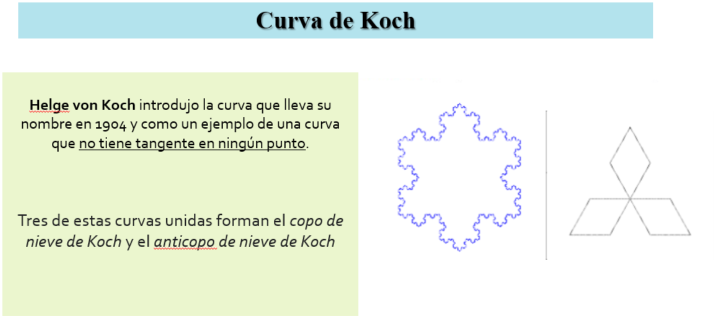
Para el proceso de comprensión de los conceptos del tema Fractales trabajado en este nivel, se implementaron actividades en los espacios de contextualización y evaluación de los conocimientos aprendidos.

Actividades de contextualización

Actividad N.° 1: En la culminación y desarrollo del subnivel 2, se generaron algunos intercambios orales con los estudiantes con el objetivo de evidenciar lo aprendido en las construcciones de fractales. Para ello, se realizaron las siguientes preguntas a los alumnos.

- ¿Hubo algún patrón en las iteraciones realizadas?
- Algunos alumnos manifestaron que en la mayoría de las construcciones se repetía el desarrollo de los primeros pasos, pero en menor medida.
- Si se siguieran realizando más iteraciones, ¿qué consecuencia se produciría?
- Los alumnos dijeron que cada vez el patrón se desarrollaría en contornos o espacios mucho más pequeños, por ejemplo, en el alambre sería más complicado hacer los pliegues.
- ¿Cuáles de los fractales construidos se pueden asociar a objetos vistos?
- Los alumnos encontraron difícil esta pregunta, por lo que se demostró que, si se unen tres curvas de Koch, forman el copo de nieve y también un anti-copo de nieve de Koch.

Figura 83. *Apoyo visual copo de nieve de Koch*



Fuente: elaboración propia.

Actividad N.° 2: Antes del subnivel 3, se realizó el espacio de socialización referente al análisis de la Coliflor Romanesco, para esta socialización se plantearon las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las características de la coliflor romanesco?
- Los estudiantes empezaron a describir la apariencia de la coliflor, color verde, estructura a través de espigas, conos y puntiagudos.
- ¿Cómo están conformados cada pico o cono de la coliflor?
- Los alumnos afirmaron que estaba formada por picos mucho más pequeños.
- ¿La estructura de la coliflor romanesco sigue algún patrón?
- Para los alumnos, esta pregunta creó un poco de dificultad, ya que se observó que la imagen de la coliflor era irregular, sin ningún patrón de construcción.

Para ayudar a los alumnos, se analizó la imagen desarrollando diferentes enfoques de escalado para observar que los pequeños picos que forman los grandes están formados a su vez por picos. Concluyendo, que si se analizaba más detenidamente se seguía observando el mismo patrón.

Tras el análisis, se mostró a los alumnos la aplicación matemática en la Coliflor Romanesco, asociándola con la serie de Fibonacci Figura 46. Finalmente, se socializó la definición de fractal, aplicaciones y el gran exponente de esta corriente Benoît Mandelbrot.

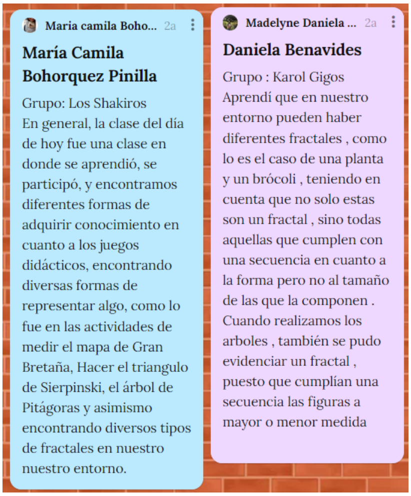
Evaluación de conocimientos

Para la evaluación de los conocimientos, se construyó una lluvia de reflexiones en torno a la pregunta ¿Qué has aprendido?

La mayoría de los comentarios de ambos cursos afirmaron que a partir de diferentes patrones se podían construir diferentes fractales, además de que las construcciones se podían hacer con diferentes materiales. Por otro lado, algunos afirmaron que fueron capaces de identificar la aplicabilidad de los fractales en la naturaleza o en el entorno.

Es evidente que el concepto de fractal estaba claro para los alumnos y, además, eran capaces de construir fractales mediante diversos materiales.

Figura 84. *Evidencia ¿Qué aprendiste en el 2° Nivel Fractales? 10.1*



Fuente: elaboración propia.

Figura 85. *Evidencia ¿Qué aprendiste en el 2° Nivel Fractales? 10.1*

Fuente: elaboración propia.

Componente de evaluación

Los componentes de evaluación se realizaron por medio de diversos instrumentos, se aplicaron intercambios orales que permitieron una comunicación asertiva alumno-profesor en la ejecución de los retos. Se utilizaron ejercicios prácticos y de registro, referidos a las pruebas respectivas. Además, hubo espacios de escritura para el análisis de algunos desafíos y reflexiones sobre los conocimientos aprendidos en el 2° Nivel.

Conclusiones: 2° Nivel – Fractales

En el curso 10.1 en algunos desafíos hubo inconvenientes por falta de participación de los alumnos, y entrega de pruebas. En el desarrollo de algunos retos se observó el interés de los alumnos por terminar los retos y mostrar las construcciones resultantes.

En el curso 10.2 se evidenció el compromiso de los estudiantes en la entrega de pruebas y participación. Por outro lado, foi evidente o agrado dos alunos na realização das construções de fractais.

Las dinámicas de los encuentros virtuales son muy diferentes a los encuentros presenciales, los estudiantes no interactúan compartiendo sus puntos de vista, inquietudes, sugerencias, por lo tanto, para generar un dialogo con los estudiantes se generó un ambiente de preguntas sobre los avances y comprensión de las temáticas o retos que se estén realizando.

Profesión del 2° Nivel

La elección de esta profesión es responsable por el estudio de la composición y estructura, interna y superficial de la tierra.

Tabla de posiciones: Los grupos que completaron la profesión del nivel fueron: 10.1 Los Yasuris Yamileth y 10.2 Harry Potter.

Tabla 11. *Tabla posición 2° nivel*

NOMBRE DEL GRUPO 10.1	2° NIVEL
Karol Gigos	★★⯪
Los Tiburonsin	★⯪
Las Yasuris Yamileth	★★★
The Beatles	★★
Shakiros	★★⯪
Virtual	★

NOMBRE DEL GRUPO 10.2	2° NIVEL
Harry Potter	★★★
Will Smith	★★
Los Backyardigans	★★
Anueles	★
SCP	★★
Virtual	★★

Fuente: elaboración propia.

3er Nivel: Geometría Esférica

Duración: una sección de encuentro presencial y una sección de encuentro virtual.

El 3er Nivel estaba estructurado para ser implementado de manera presencial, pero debido a las actividades institucionales, solo se pudo implementar una sección para los dos cursos presenciales y uno virtual.

Resolución de retos 10.1 y 10.2

Subnivel 1

En el subnivel de representación e interpretación se llevaron a cabo tres retos. Estos retos se constituyeron de la siguiente manera:

Reto 1: ¿Cuál es la distancia más corta entre Bogotá (Colombia) y Roma (Italia)?

Cada uno de los grupos y alumnos, en modalidad virtual, disponía de una bola de poliestireno N.° 12, una fotocopia del Mapamundi (con anchura igual a la longitud de la circunferencia máxima de la bola de icopor N.° 12), regla, cordel y bolígrafos.

Los alumnos tenían que calcular cuál era la distancia más corta entre las dos ciudades (Bogotá y Roma). Para el desarrollo, se animó a los alumnos a hacer uso de todos los materiales si era necesario.

Conclusiones: La mayoría de los grupos y estudiantes de la modalidad virtual del curso 10.1, realizaron el proceso de ubicar las dos ciudades en el mapamundi, luego, por medio de la regla, unieron los dos puntos. Las longitudes obtenidas por los grupos variaron de 10 cm a 10,2 cm.

Uno de los grupos realizó un procedimiento diferente, utilizando la bola de poliestireno y el cordel.

Los pasos realizados fueron:

- Hacer coincidir la fotocopia con los lugares demarcados de las ciudades en la esfera.
- Medir las distancias en la esfera con el hilo.
- Con la regla, medir la distancia del hilo.
- El resultado es de 9,5 cm.

Figura 85. *Evidencia distancia entre Bogotá y Roma 10.1*

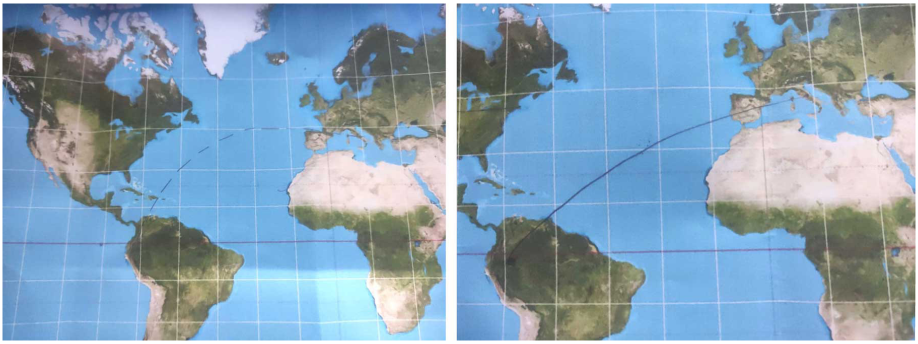
Fuente: elaboración propia.

Todos los grupos y alumnos de la modalidad virtual del curso 10.2 realizaron el proceso utilizando únicamente el mapamundi, el hilo conductor y la regla.

Los grupos que hicieron uso de la regla les dio longitudes de 9,8 cm a 10 cm.

Otros grupos dibujaron en el mapamundi el comportamiento curvo de la unión de estos dos puntos, mediante el alambre midieron las distancias dando longitudes entre 10 cm y 11 cm.

Figura 86. *Evidencia distancia entre Bogotá y Roma 10.2*



Fuente: elaboración propia.

Evidenciando que las longitudes eran mayores a medida que trabajaban sobre la superficie plana (mapamundi).

Reto 2: Nueva York y Tokio

Los grupos de modalidad virtual y los alumnos debían analizar el siguiente enunciado y responder a él, utilizando los mismos materiales que en el Desafío 1- Subnivel 1.

Enunciado: Si elegimos la ruta entre Nueva York y Tokio, que distan solo unos cinco grados en cuanto a latitud, ¿el viaje se realizó principalmente por mar o por tierra?

Conclusiones: Todos los grupos afirmaron que el viaje se realizaría más por mar, concretamente por el Océano Pacífico, para afirmar este resultado los alumnos hicieron uso únicamente del mapamundi.

Figura 87. *Evidencia del recorrido entre Nueva York y Tokio*

(B) Lo mayor parte del recorrido era por mar, ya que recorre el pacifico teniendo en cuenta los cinco grados de separación latitudinal

- Al irnos por la parte izquierda de Nueva York y llegar a Asia se recorre más mar, ya que teoricamente estan al lado un continente del otro asi que no se toca mucha más tierra, siendo asi mismo, el recorrido en mayoría por mar:

Fuente: elaboración propia.

Reto 3: Postulados de Euclides

Cada grupo se le asignó al azar uno de los cinco postulados de Euclides Figura 53, el trabajo a realizar era escribir el enunciado que se adecuaba a la imagen del postulado que les correspondió.

Conclusiones: Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Figura 88. *Evidencia descripción postulado de Euclides 10.1*

A partir de dos puntos se puede formar una linea recta.

Es una recta que se corta con dos segmentos, en este caso punto A y B.

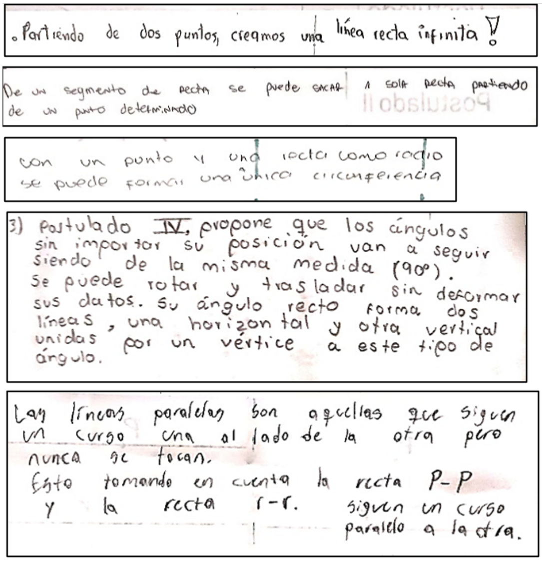
Con el radio de una figura se puede formar una circunferencia partiendo del punto medio

Genera angulos de 90°
en diferentes posiciones

(C) Teniendo una recta r y un punto P, si trazamos una recta en este con la misma inclinación que r estas seran paralelas entre si.

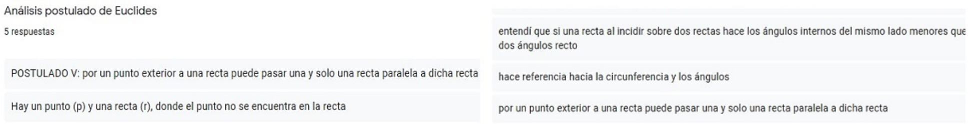
Fuente: elaboración propia.

Figura 89. *Evidencia descripción postulado de Euclides 10.2*



Fuente: elaboración propia.

Figura 90. *Evidencia descripción postulado de Euclides estudiantes virtuales*



Fuente: elaboración propia.

Subnivel 2

En el subnivel de formulación y ejecución se llevó a cabo dos retos, estos estaban constituidos de la siguiente manera:

Reto 1: Círculos máximos

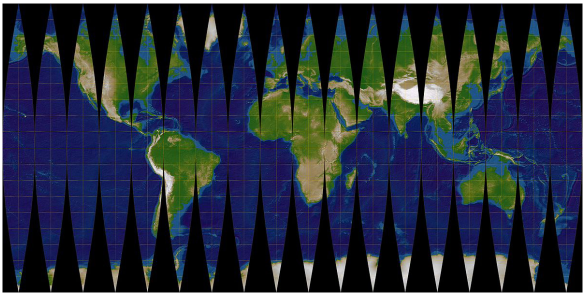
Los grupos tenían que analizar la definición de circulo máximo y modelizarla en una esfera de plastilina.

Conclusiones: La construcción de los círculos máximos por los grupos se llevó sin ninguna dificultad.

Reto 2: Comportamiento de distancias en una superficie esférica (retos 1 y 2 - Subnivel 1)

Los estudiantes tenían que construir un globo terráqueo por grupo, para tal construcción, se hizo entrega del material correspondiente; plantilla mapamundi con las medidas de la bola de icopor N.° 12.

Figura 91. *Plantilla mapamundi*



Fuente: elaboración propia.

Conclusiones: Las construcciones se desarrollaron en equipo sin ninguna dificultad. Los estudiantes en virtualidad también contaban con los materiales para construir el globo terráqueo.

Figura 92. *Evidencias de construcciones del Globo terráqueo*

Fuente: elaboración propia.

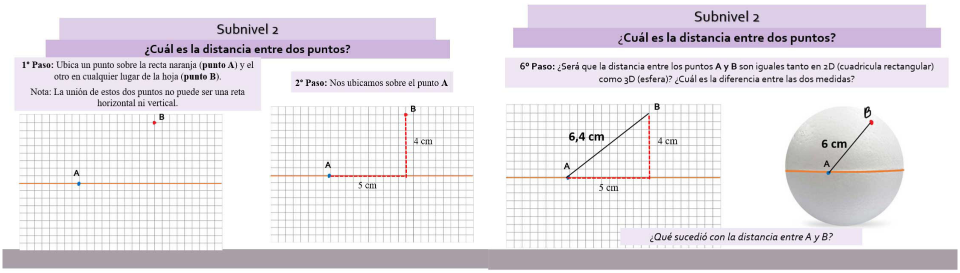
La continuación del nivel se llevó a cabo de manera virtual, por lo tanto, se modificaron los retos debido a que se construyó un globo terráqueo por grupo, entonces, en el encuentro virtual solo un integrante del grupo tenía el material.

Reto 2: Distancia entre dos puntos

Cada uno de los estudiantes en casa tenían una bola de icopor N.° 6, hilo, regla y una cuadricula de 19cm x 9cm. Nota: Los estudiantes que tenían el material de los anteriores retos podían hacer uso de estos.

El desarrollo de este reto era seguir cada una de las instrucciones o pasos a realizar en los dos materiales; Bola de icopor y cuadricula, Tabla 6. El desarrollo se llevó a cabo con el asesoramiento de la docente.

Figura 93. *Apoyo visual distancia entre dos puntos*



Fuente: elaboración propia.

Conclusiones: Los resultados de los estudiantes dieron que las distancias entre una superficie 2D y 3D se comportaban de manera diferente, debido a que en la superficie 3D (bola de icopor), el segmento entre la unión de los puntos A y B es una curva debido a que se está trabajando en una superficie esférica, mientras que en la superficie 2D (cuadricula), era una recta.

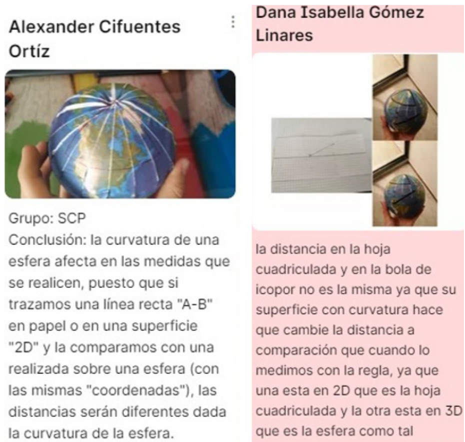
Figura 94. *Evidencia distancia entre dos puntos 10.1*

Fuente: elaboración propia.

En curso 10.1 se evidencio mayor participación en la elaboración del reto. Además, es de destacar la recursividad de los estudiantes por la falta del material requerido.

El curso 10.2 se evidencio la falta de participación y evidencia por parte de los estudiantes.

Figura 95. *Evidencia distancia entre dos puntos 10.2*



Fuente: elaboración propia.

Subnivel 3

El subnivel de argumentación se implementó dos retos, estos estaban constituidos de la siguiente manera:

Reto 1: Triángulos esféricos

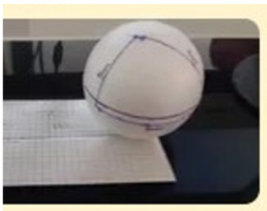
El reto consistía en observar cómo se comportaban los triángulos en una superficie esférica, para esto, los estudiantes tenían que construir un triángulo por medio de las instrucciones.

Conclusiones: La elaboración del triángulo por parte de los estudiantes se llevó sin ninguna dificultad.

Luego de finalizar la construcción, se desarrolló las preguntas del 4°Paso, dando las siguientes respuestas.

Figura 96. *Evidencia triángulos esféricos 10.1*

Conclusión: La distancia de los puntos A y B no van a ser iguales, como en la hoja y la esfera, debido que tienen diferentes dimensiones por lo tanto se distorsiona su medida. A la hora de realizar el segundo ejercicio, la figura que forma es un triángulo isósceles, y al menos tiene dos lados iguales, por lo tanto tenemos dos ángulos iguales (90°) y uno diferente (74°).
Con ayuda de estos ejercicios se aprendió a encontrar la diferencia que existe, entre la distancia de determinado punto a otro, de acuerdo a la dimensión en que se encuentre.



Fuente: elaboración propia.

Figura 97. *Evidencia triángulos esféricos 10.2*

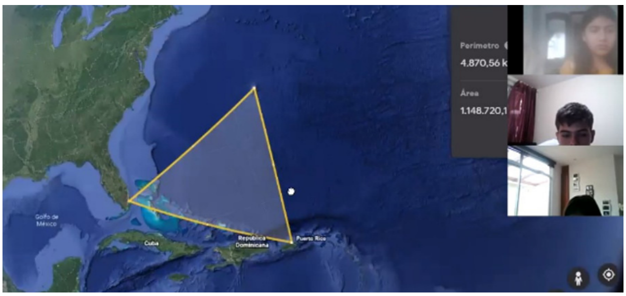
Cuando ubicamos el punto A y B en el rectángulo, al unirlos, se forma un triangulo, que según el plano cartesiano, daba ciertas medidas, pero si esto mismo lo hacemos en la figura 3D, las medidas van a ser diferentes en algunos casos, esto se debe a que la geometría esférica, quizás por sus dimensiones, los ángulos que se forman dentro del triangulo, no dan 180° sino que pueden dar desde 180° hasta 540°.

Fuente: elaboración propia.

Reto 2: Figuras esféricas

El reto consistió en unir ciudades o capitales dadas, por medio de Google Earth. Para el inicio del reto se dieron las indicaciones base en la utilización de la plataforma, luego se dispuso a realizar la unión de las tres ciudades que conforma el triángulo de las bermudas. Por último, cada curso tenía asignado una unión de ciudades diferentes.

Figura 98. *Evidencia triángulo de las bermudas*



Fuente: elaboración propia.

Debido al tiempo y problemas de conexión el reto no fue culminado.

Proceso de comprensión

Actividades de contextualización

Actividad N.° 1: En el desarrollo y culminación del subnivel 1 se generaron algunos intercambios orales con los estudiantes con el propósito de analizar el cumplimiento de los postulados de Euclides y así dar paso a la definición de Geometría Euclidiana. Para esto, se les formuló a los estudiantes las siguientes preguntas.

- ¿Sera que el quinto postulado funciona en todo ámbito? ¿Será verdadero? La respuesta de la mayoría de los estudiantes fue que, si era verdadero, debido a que son los postulados que definen las bases de la geometría y no deberían tener error alguno.
- ¿Pasará una y solo una paralela? ¿Y si no pasara ninguna? ¿Y si pasaran dos o más? Podría ser verdadero. A los estudiantes se les dificulto poder responder a esta pregunta, ya que estaban acostumbrados a pensar en una geometría plana.

Para ayudar a los estudiantes se les propuso que analizaran como se comportarían las líneas paralelas en una superficie esférica, ejemplo, en el globo terráqueo tomando de referencia los meridianos. Entonces, nuevamente se les pregunto.

- ¿Sera que el quinto postulado funciona en todo ámbito? ¿Será verdadero? Las respuestas de los estudiantes evidenciaron que no pasa ninguna recta paralela debido a que todos los meridianos se cortan en los polos del globo terráqueo.

En conclusión, la geometría no es solo una (geometría euclidiana), sino existen diversos ámbitos donde toma diferentes propiedades o comportamientos.

Actividad N.° 2: Luego de la finalización del subnivel 2, se volvió a retomar las preguntas y respuestas de los estudiantes en el subnivel 1.

Preguntas:

- ¿Cuál es la distancia más corta entre Bogotá-Colombia y Roma-Italia?
- Si escogemos la ruta entre Nueva York y Tokio, que están a tan solo unos cinco grados de separación en cuanto a su latitud ¿El viaje transcurría en su mayoría sobre el mar o tierra?

Los estudiantes evidenciaron que las respuestas dadas en el subnivel 1 eran incorrectas, debido a que habían considerado las distancias planas y no esféricas.

Para socializar las respuestas correctas de las dos preguntas, se compartió la resolución del grupo que implemento la bola de icopor para hallar la distancia de la primera pregunta Figura 119. Para la respuesta dos, se dispuso del apoyo de Google Maps y Google Earth para modelar el ejercicio y se hiciera notorio que el recorrido se desarrollaba en su mayoría por mar Figura 57.

Además, en el inicio del subnivel 1, 2 y 3, se desarrollaron las respectivas contextualizaciones referente a: concepto de geometría, postulados de Euclides, el concepto de geometría esférica, la ubicación de puntos y segmentos por medio de los círculos máximos y el comportamiento de figuras en una superficie esférica. Cada una de estas contextualizaciones se iniciaron o finalizaron con retos, que permitieron facilitar la comprensión de los conceptos o explicaciones dadas por la docente.

Las evidencias y vivencias recolectadas en la implementación mostraron la comprensión de los conceptos que abarca el 3° Nivel geometría esférica.

Evaluación de conocimientos

Para la evaluación de conocimientos se implementó una rutina de pensamiento Figura 51. El diligenciamiento se llevó en el inicio y final de la implementación del nivel.

En la primera pregunta ¿Qué es Geometría Esférica? los estudiantes comentaron que la geometría esférica son aquellas características, propiedades matemáticas y geométricas que componen y conforman el uso de una esfera, otros estudiantes afirmaron que es el estudio del comportamiento de los cuerpos en un contorno esférico, además otros asociaron la geometría esférica como el estudio de los cuerpos geométricos como la tierra, el sol, planetas, etc.

En el siguiente recuadro se trataba en escribir ¿Qué quisiera saber sobre la geometría esférica? La mayoría de las respuestas se encaminaron a como poder incorporar lo aprendido en la naturaleza o como aplicarlo en la vida, además del comportamiento del teorema de Pitágoras o el teorema del seno o coseno.

El ultimo recuadro sobre los conocimientos aprendidos, los estudiantes escribieron que aprendieron a identificar como las distancias entre lugares o puntos, ángulos, lados de figuras se comportan de manera diferente si se trabaja en diferentes superficies.

Componente evaluativo

Los componentes evaluativos se llevaron a cabo por medio de varias herramientas, se aplicó intercambios orales que permitió la comunicación asertiva entre estudiante-docente en la ejecución de los retos. Se implemento espacios de escritura referente a los procesos llevados a cabo para la solución de los retos. Además, de ejercicios prácticos y de registro, referente a las evidencias respectivas.

También se evaluó la participación, trabajo en grupo y actitudes favorables para el desarrollo de los retos que componía el 3°Nivel.

Profesión del 3er Nivel

PILOTO

Tanto pilotos como navegantes utilizan la geometría esférica para encontrar los caminos o recorridos mínimos en la superficie de la tierra.

Tabla de posiciones: Los grupos que completaron la profesión del nivel fueron: 10.1 Los Tiburonsin y 10.2 SCP.

Tabla 12. *Tabla posición 3er NIVEL*

NOMBRE DEL GRUPO 10.1	3° NIVEL
Karol Gigos	★★
Los Tiburonsin	★★★
Las Yasuris Yamileth	★★
The Beatles	★★
Shakiros	★
Virtual	

NOMBRE DEL GRUPO 10.2	3° NIVEL
Harry Potter	★★
Will Smith	★★
Los Backyardigans	★★

NOMBRE DEL GRUPO 10.2	3° NIVEL
Anueles	
SCP	✪✪✪
Virtual	✪✪

Fuente: elaboración propia.

4to Nivel: Topología

Duración: Una sección de encuentro virtual y dos secciones de encuentro presencial.

En el desarrollo del 4° Nivel se implementó las mismas dinámicas narradas en el 2° Nivel para los encuentros virtuales.

Realización de retos

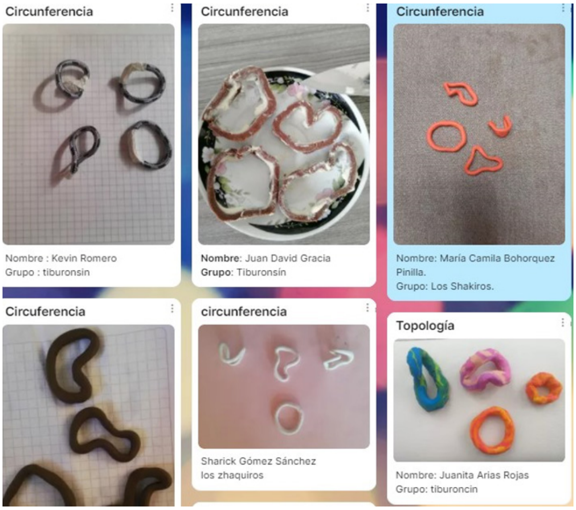
Subnivel 1

En el subnivel de representación e interpretación se llevó a cabo el reto de transformaciones de una circunferencia hecha en plastilina.

Para las construcciones se enfatizó en las transformaciones que serían incorrectas como la unión de puntos y romper la circunferencia.

Conclusiones: El curso 10.1, fue muy participativo y estratégico en las posibles transformaciones, además algunos estudiantes por la falta de plastilina en sus casas hicieron uso de otros materiales que les permitió modelar lo requerido.

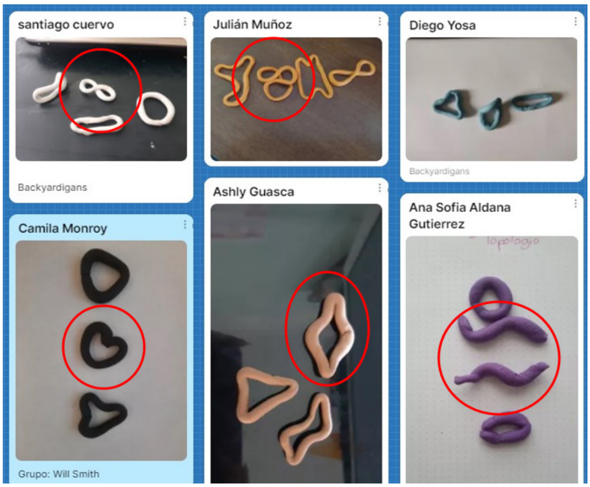
Figura 99. *Evidencia transformaciones de una circunferencia 10.1*



Fuente: elaboración propia.

Algunos estudiantes del curso 10.2, tuvieron mal sus transformaciones debido a que no tomaron en cuenta las reglas a seguir y la interpretación de igualdad en topología. Además, se evidencio la poca participación de entregas en el Padlet correspondiente.

Figura 100. *Evidencia transformaciones de una circunferencia 10.2*



Nota: En la figura se evidencia los errores de los estudiantes a no tener en cuenta las reglas de transformaciones que se puede desarrollar. **Fuente:** elaboración propia.

Subnivel 2

En el subnivel de formulación y ejecución se llevó a cabo dos retos estructurados de la siguiente manera:

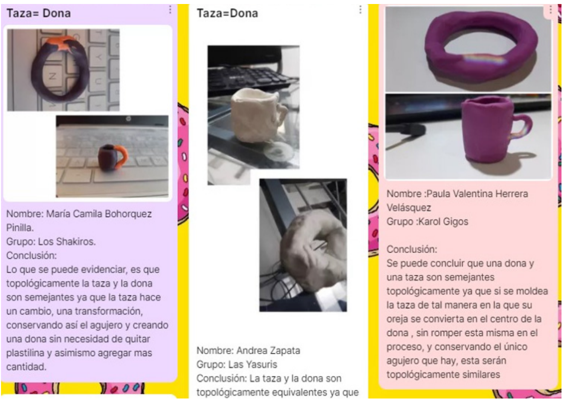
Reto 1: Un mundo de Plastilina: Tasa y rosquilla. El reto consistía en realizar transformaciones en una tasa de plastilina para obtener una rosquilla

Conclusiones: En el transcurso del reto se les recordó a los estudiantes que en ningún momento se podía romper partes de la tasa para obtener la rosquilla, además de respetar el agujero de su geometría.

Las construcciones de los estudiantes de 10.2 se evidencio los pasos seguidos para obtener la rosquilla teniendo en cuenta las reglas de las transformaciones. Mientras que el curso 10.1 no hizo evidente los pasos de transformación sino el resultado final.

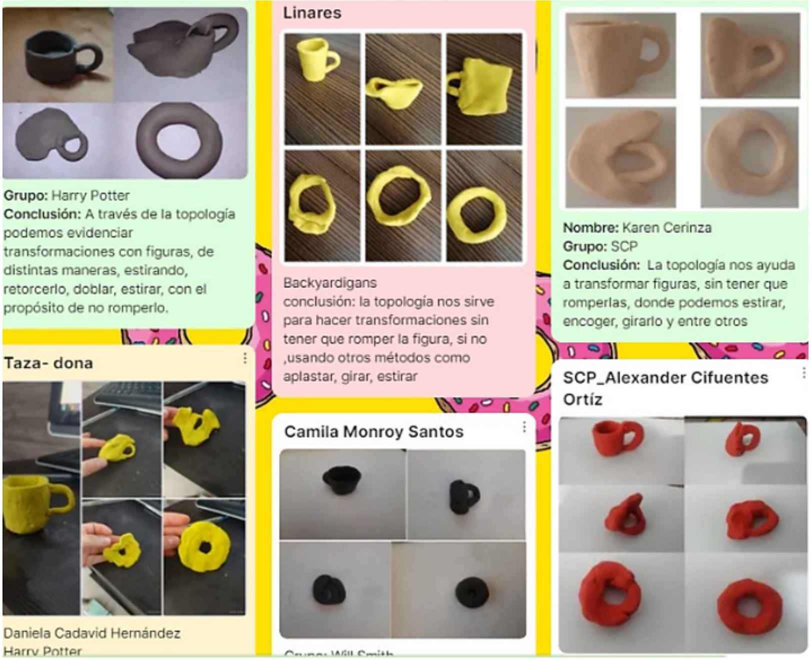
Los estudiantes afirmaron en la conclusión del reto que los dos objetos son topológicamente iguales, debido a que se respeta la geometría del agujero de la taza a ser el centro de la dona, además la transformación se obtiene sin quitar, ni agregar más cantidad de plastilina.

Figura 101. *Evidencia transformaciones tasa a rosquilla 10.1*



Fuente: elaboración propia.

Figura 102. *Evidencia transformaciones tasa a rosquilla 10.2*



Fuente: elaboración propia.

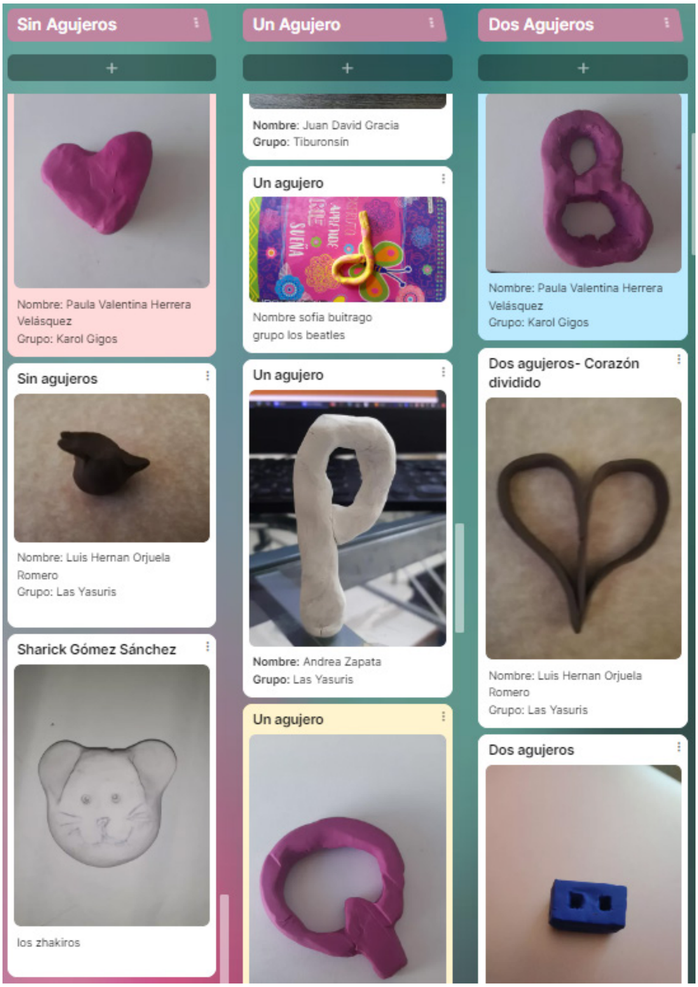
Reto 2: Transformaciones respetando los agujeros de su geometría

Para este segundo reto se realizó con los estudiantes transformaciones de objetos sin agujero, con un agujero y con dos agujeros.

Las transformaciones realizadas se desarrollaron con la ayuda de la docente, para entender la dinámica de los objetos a realizar.

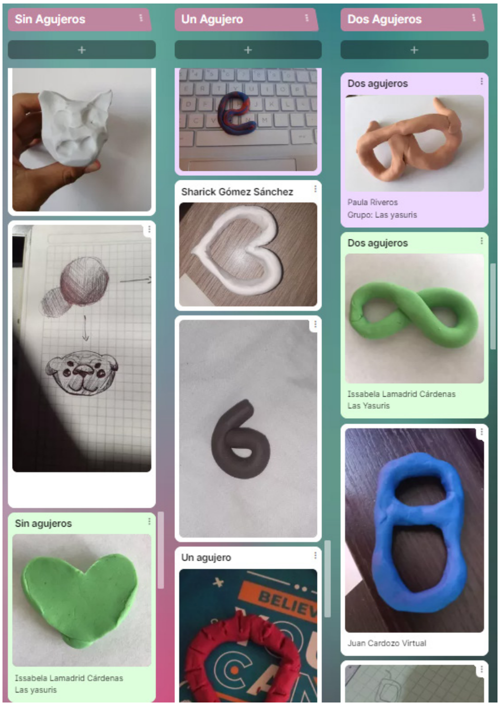
Conclusiones: Los estudiantes que no tenían plastilina podían dibujar la transformación por cada uno de los tres retos. Las transformaciones de los estudiantes fueron muy variadas.

Figura 103. *Evidencia transformaciones respetando los agujeros 10.1*



Fuente: elaboración propia.

Figura 104. *Evidencia transformaciones respetando los agujeros 10.2*



Fuente: elaboración propia.

Subnivel 3

En el subnivel de argumentación se llevó a cabo dos retos estructurados de la siguiente manera:

Reto 1: Cuerdas presencial

Para este reto se le pidió a cada grupo que eligiera a dos integrantes. Estos dos estudiantes tenían que atarse las muñecas y luego entrelazarse Figura 70. Los demás integrantes del grupo tenían que encontrar la manera de poderlos soltar sin cortar las cuerdas, ni soltar las muñecas de sus compañeros.

Conclusiones: Los grupos trabajaron en equipo para encontrar la manera de poder soltar a sus compañeros. Para poder ayudar a los grupos en la resolución se llevaron a cabo diálogos por medio de preguntas que permitieron analizar como las cuerdas se cruzaban y que alternativas de movimientos se tenía, sin tener que lastimar las muñecas de sus compañeros o enredar las cuerdas.

Figura 105. *Evidencia cuerdas*

Fuente: elaboración propia.

Solución: En el siguiente enlace se encuentra la estrateguia realizada por uno de los grupos para poder soltar a sus compañeros. https://drive.google.com/file/d/1PT0tc_yuylr9GWiLvqhuOzyPYZ-HDPIt/view?usp=sharing

Reto 1: Cuerdas virtual

Los estudiantes participaron de la actividad sin ningún inconveniente llegando a obtener el paso de inicio de la Figura 71.

Reto 2: Nudo de corbata

Para este reto se le asignó al azar un nudo de corbata por cada equipo, cada uno de los integrantes tenían que seguir los pasos de la Figura 72, para obtener el nudo de corbata correspondiente. En el transcurso de la resolución del reto se evidencio algunas estrategias de los equipos, como delegar un líder que guiara cada uno de los pasos, así la solución se desarrollaba conjuntamente, otros grupos decidieron desarrollar el nudo cada uno de forma individual leyendo la imagen, por otra parte, algunos grupos dejaron a un solo integrante desarrollar los nudos de corbata de todos.

Unos grupos no pudieron finalizar el reto, debido a que no fueron estratégicos para elegir un camino de resolución que involucrara el apoyo en equipo.

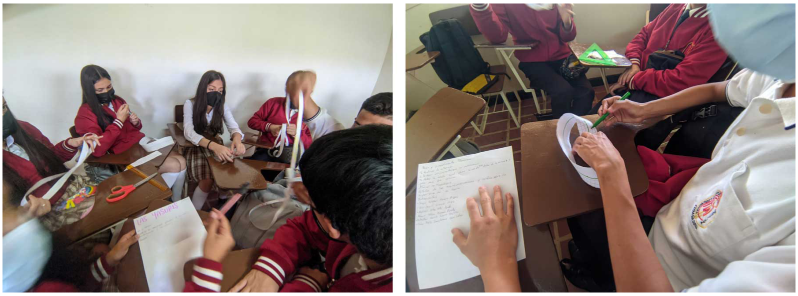
Los estudiantes en modalidad virtual les correspondía el nudo de corbata Vitoria, el desarrollo de este se llevó sin ninguna dificultad.

Subnivel superior

La implementación del subnivel solo se llevó a cabo para el curso 10.1, este consistía en observar las transformaciones topológicas en superficies, para esta se construyendo una cinta de Möbius. La construcción se llevó a cabo por medio de lectura de imágenes y además de pistas.

La construcción por los estudiantes se desarrolló sin ningún inconveniente.

Figura 106. *Evidencia cinta de Möbius*



Fuente: elaboración propia.

Proceso de comprensión

Para el proceso de comprensión de los conceptos de la temática de Topología trabajados en este nivel, se implementó actividades en los espacios de contextualización y evaluación de conocimientos aprendidos.

Actividades de contextualización

Actividad N.° 1: Antes del desarrollo del subnivel 1 se generaron algunos intercambios orales con los estudiantes con el propósito de aclarar el concepto de igualdad o equivalencia en topología, para este se inició con el significado de geometría y luego el de topología.

Para abordar el tema de transformaciones en topología, se les presento a los estudiantes las imágenes de la Figura 62. Teniendo en cuenta el significado de igualdad se les pregunto a los estudiantes:

¿Todas las figuras anteriores serian consideradas iguales? Algunos estudiantes se les dificulto esta pregunta debido a que seguían pensando en la geometría euclidiana y el concepto de igualdad por medio de isometrías. Por lo tanto, se desarrolló un espacio de socialización llegando a concluir que las transformaciones que se pueden realizar en un objeto o figura serian encoger, estirar, doblar y retorcer.

Actividad N.° 2: En la finalización del subnivel 1 se desarrolló la contextualización referente a las reglas de transformaciones y de respetar la geometría del agujero de la figura.

Para identificar la comprensión de las reglas, se socializaron las posibles transformaciones en una circunferencia y en una esfera Figura 66. Además, se socializaron otras posibles transformaciones, por ejemplo, un estudiante afirmo que la circunferencia puede ser transformada en el croquis de un corazón o un trébol, otros estudiantes afirmaron que podrían ser las letras que poseen un agujero como la a, b, d, g, etc. En la siguiente figura, afirmaron que podría llevarse a cabo un corazón, la cara de algún animal, una pirámide, etc.

Los ejemplos de transformaciones dados por los estudiantes permitieron identificar la comprensión de las reglas de transformaciones en topología.

Actividad N.° 3: Luego de la finalización del subnivel superior, se llevaron a cabo algunas preguntas que permitieron analizar los fenómenos que surgen en la cinta de Möbius.

Preguntas:

- En el Paso 4 de la Tabla 7 ¿Qué sucede con el recorrido de la cinta Möbius? ¿en algún momento levantaron el lápiz? Los estudiantes afirmaron que en ningún momento se levantó el lápiz y llegaron al mimo lugar de partida, evidenciando que el recorrido en cinta es infinito.
- ¿Qué sucede con la cinta de Möbius cuando se corta su ancho por la mitad?, La mayoría de los estudiantes afirmaron que el resultado iba a ser dos cintas de Möbius. Para comprobar las respuestas, se les pidió a los

estudiantes que hicieran el procedimiento, evidenciaron que no surgía dos cintas de Möbius sino una cinta mucho más larga que la original

- ¿Qué sucederá si se vuelve a cortar el ancho de la cinta por la mitad? Los estudiantes afirmaron que la cinta se iba a volver mucho más larga. Para comprobar las respuestas se les pidió a los estudiantes que realizaran el procedimiento, evidenciando que surgen dos cintas de Möbius, una más larga que la otra, además una cinta es de Möbius y la otra tiene más de una media vuelta.

Figura 107. *Evidencia cinta de Möbius*

Conclusiones

1. En el primer paso se realizo una linea infinita
2. Al cortarlo a la mitad, el cuerpo consiguio mayor longitud sin separarse
3. Al cortarlo nuevamente, se transformó, creando mas curvaturas

CONCLUSIÓN

- Se puede concluir de la actividad realizada que la matemático tiene diferentes perspectivas, depende del individuo que aporte, por esto mismo la matemático es diversa y siempre tendra diferentes perspectivas de ver los cosas.
-

Fuente: elaboración propia.

Se concluyó que trabajar en tres dimensiones suele desafiar la intuición de las cosas, además se recalca que en el mundo matemático todo es posible.

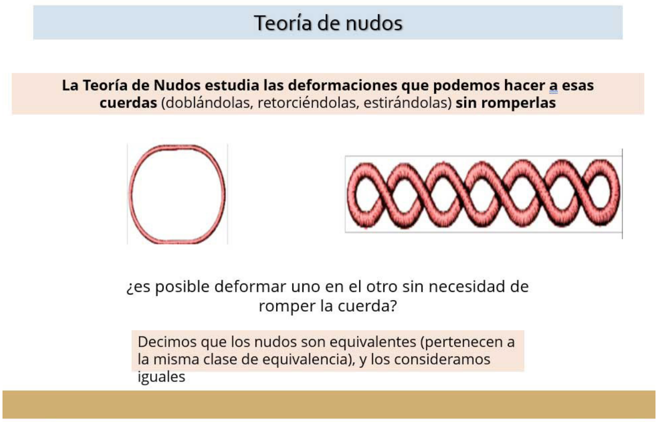
Por último, se socializo las conclusiones de los estudiantes y algunas aplicaciones de la cinta de Möbius.

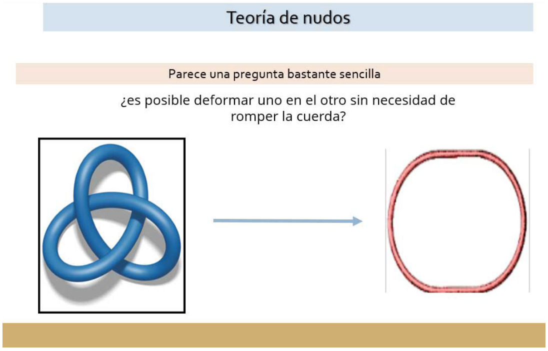
Figura 108. *Apoyo visual aplicación cinta de Möbius*

Fuente: elaboración propia.

Actividad N.° 4: Antes de iniciar con el subnivel 3, se llevó a cabo la contextualización referente a la Teoría de Nudos. Para facilitar los conceptos y las reglas de transformaciones en los nudos se inició con la siguiente pregunta:

Figura 109. *Apoyo visual teoría de nudos*





Fuente: elaboración propia.

Referente a la Figura 109: a) ¿Es posible deformar uno en el otro sin necesidad de romper la cuerda? Los estudiantes contestaron a la pregunta que sí, debido a que, para pasar de una a la otra la transformación al nudo trivial era retorcerlo para obtener el nudo de la imagen derecha.

Referente a la Figura 109: b) ¿Es posible deformar uno en el otro sin necesidad de romper la cuerda? Para esta pregunta cada uno de los grupos contaba con el nudo trébol. Los estudiantes tenían que mirar si era posible transformarlo para obtener el nudo trivial, teniendo en cuenta las reglas de transformaciones. Algunos grupos afirmaron que, si era posible, pero otros estudiantes argumentaron que no se podía llevar la transformación, debido a que no se podía soltar el nudo Figura 110, la única manera para obtener el nudo trivial seria rompiendo la cuerda para poder desatar el nudo.

Figura 110. *Evidencia teoría de nudos*

Fuente: elaboración propia.

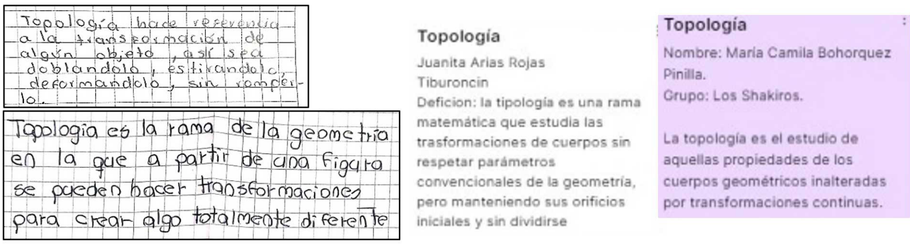
Las evidencias y vivencias recolectadas en la implementación mostraron la comprensión de los conceptos que abarca el 4° Nivel topología.

Evaluación de conocimientos

Para la evaluación de conocimientos se llevó a cabo reflexiones por parte de los estudiantes sobre la pregunta ¿Qué es topología? Teniendo en cuenta lo aprendido en los retos.

Las respuestas dadas por los estudiantes definieron topología como el estudio de las distintas transformaciones a objetos o figuras sin necesidad de añadir elementos, ni rompiéndolos.

Figura 111 *Evidencia ¿Qué es topología?*



Nota: La figura a) muestra las evidencias de los estudiantes presenciales y la figura b) evidencias de los estudiantes virtuales. **Fuente:** elaboración propia.

Componente evaluativo

Los componentes evaluativos se llevaron a cabo por medio de varias herramientas, se aplicó intercambios orales que permitió la comunicación asertiva entre estudiante-docente en la ejecución de los retos. Se implemento espacios de escritura referente a los procesos llevados a cabo para la solución de los retos. Además, de ejercicios prácticos y de registro, referente a las evidencias respectivas.

El componente con más relevancia en este nivel fue los intercambios orales, la participación, trabajo en grupo y actitudes favorables para el desarrollo de los retos que componen el 4° Nivel.

Conclusiones: 4° Nivel – Topología

El curso 10.1 se destacó por buscar alternativas de materiales para el desarrollo de los retos en el encuentro virtual.

Hubo mayor participación y actitudes favorables referente a los contenidos de los retos. En el curso 10.2 se notó una falta de participación y entrega de evidencias, esto debido a que algunos estudiantes no contaban con los materiales en casa.

En los encuentros presenciales se evidencio un agrado al contenido de los retos.

La gamificación gira entorno a la competitividad y a la restricción de tiempos para la elaboración de los retos, debido a esto, algunos grupos no fueron muy agiles en tomar el camino más asertivo para culminar en equipo cada uno de los subniveles.

Profesión del 4° Nivel

ALFARERO

La alfarería es el arte de moldear por medio del barro objetos, como por ejemplo elementos culinarios, domésticos, decorativos, de construcción, etc.

Tabla de posiciones: Los grupos que completaron la profesión del nivel fueron: 10.1 Shakiros y 10.2 Will Smith

Tabla 13. *Tabla posición 4to NIVEL*

NOMBRE DEL GRUPO 10.1	4° NIVEL
Karol Gigos	★★
Los Tiburonsin	★★½
Las Yasuris Yamileth	★★½
The Beatles	★★
Shakiros	★★★
Virtual	½

NOMBRE DEL GRUPO 10.2	4° NIVEL
Harry Potter	★★
Will Smith	★★★
Los Backyardigans	★★
Anueles	★
SCP	★★½
Virtual	★

Fuente: elaboración propia.

Duración: Una sección de encuentro presencial y una sección de encuentro virtual.

5to Nivel: Teoría de Grafos

En el desarrollo del 5° Nivel se implementó las mismas dinámicas narradas en el 2°Nivel para los encuentros virtuales.

Realización de retos

Subnivel 1

En el subnivel de representación e interpretación se llevó a cabo el reto de construir la red de amistad de las conexiones en Facebook por cada uno de los compañeros.

Figura 112. *Apoyo visual red de amistad Facebook*

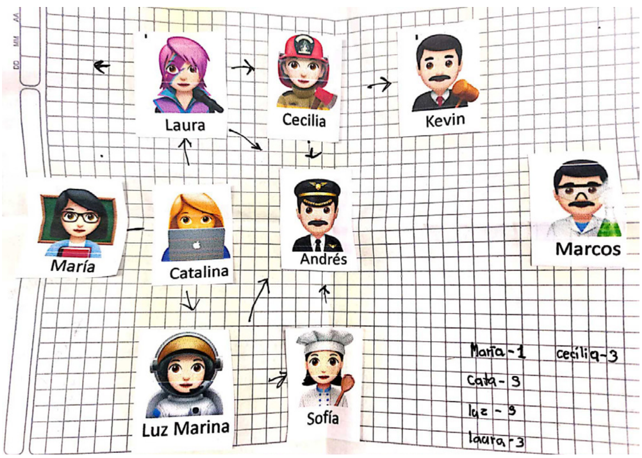
Fuente: elaboración propia.

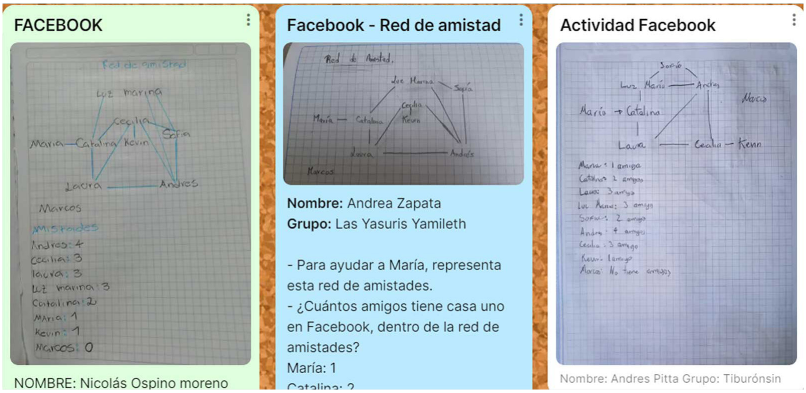
Para entender la dinámica de construcción de la red se llevó a cabo la solución de la primera conexión de amistad entre María y Catalina, la conexión se representó por medio de una línea conectando la imagen o nombre de María a la de Catalina.

Conclusiones: Los grupos y estudiantes virtuales no tuvieron inconvenientes en la construcción de la red. Luego, se les pregunto a los estudiantes ¿Cuántos amigos tienen cada uno en Facebook dentro de esta red de amistades?, los estudiantes afirmaron que para apreciar con facilidad la conexión entre amistades solo era necesario contar las aristas que salía por cada una de las imágenes o nombres, dando como resultado:

- María: una amiga (Catalina)
- Catalina: 3 amigas (Laura, Luz Marina, María)
- Laura: 3 amigos (Catalina, Cecilia, Andrés)
- Luz Marina: 3 amigos (Catalina, Sofía, Andrés)
- Sofía: 2 amigos (Andrés, Luz Marina)
- Andrés: 4 amigos (Cecilia, Sofía, Laura, Luz Marina)
- Cecilia: 3 amigos (Laura, Andrés, Kevin)
- Kevin: 1 amiga (Cecilia)
- Marcos: 0 amigos.

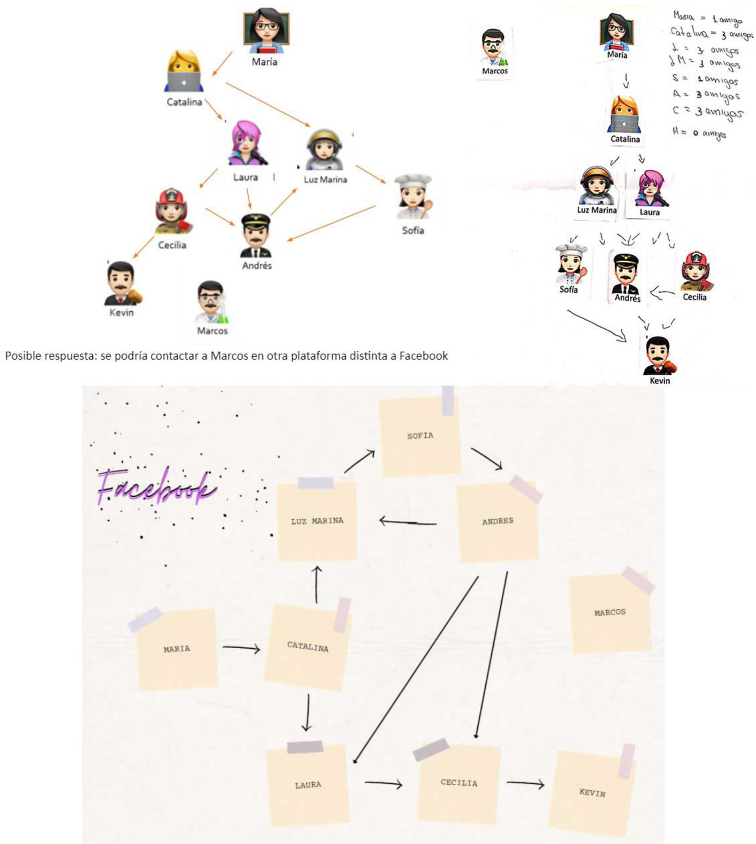
Figura 113. *Evidencia red de amistades estudiantes virtuales y presenciales 10.1*





Fuente: elaboración propia.

Figura 114. *Evidencia red de amistades estudiantes virtuales y presenciales 10.2*



Fuente: elaboración propia.

Subnivel 2: Presencial

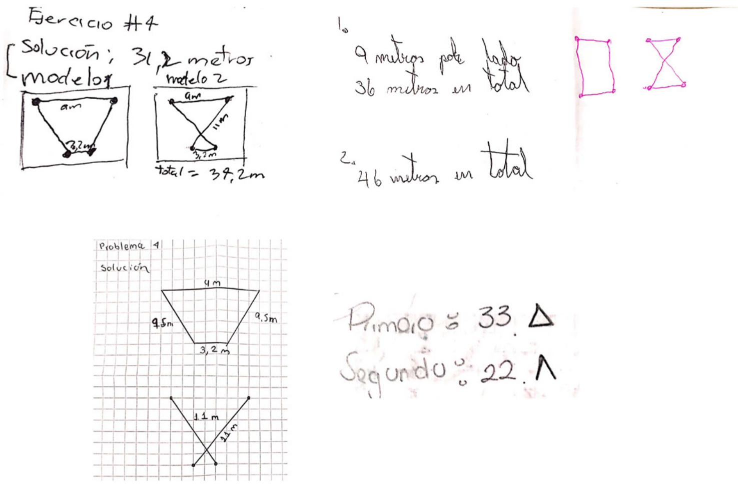
En el subnivel de formulación y ejecución, trataba de modelizar las posibles uniones mínimas entre ciudades o antenas por medio de cauchos en el geoplano correspondiente al problema asignado previamente.

Los estudiantes tenían que ir dibujando los modelos hallados y la longitud de la unión de este.

Figura 115. *Evidencia modelos construidos por los estudiantes*

Fuente: elaboración propia.

Figura 116. *Evidencia longitud unión de ciudades o antenas*



Fuente: elaboración propia.

Subnivel 3: Presencial

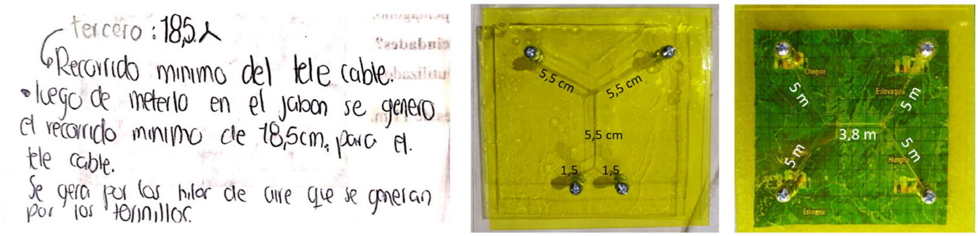
Reto 1: Superficies jabonosas

El subnivel de argumentación trataba de hacer uso de superficies jabonosas para hallar los recorridos mínimos por cada uno de los problemas. Los estudiantes ingresaron las plaquetas en jabón y evidenciaron la unión mínima, luego se dispusieron a medir el modelo. Obteniendo lo siguiente:

Figura 117. *Evidencia superficies jabonosas*

Fuente: elaboración propia.

Figura 118. *Evidencia medidas en superficies jabonosas*

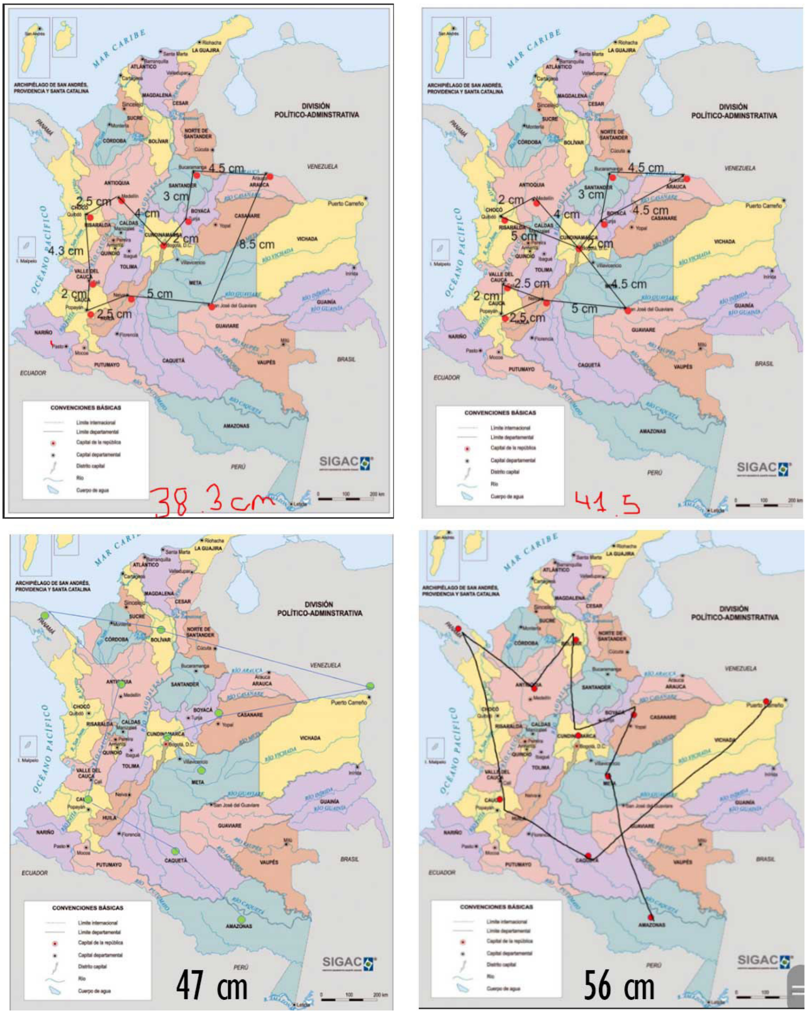


Fuente: elaboración propia.

Subnivel 2: Virtual

Los estudiantes en modalidad virtual realizaron el proceso de encontrar el recorrido mínimo entre las ciudades de Colombia que quisieran visitar, para esto tenían que encontrar dos modelos posibles de uniones entre las ciudades y dar la longitud en centímetros de cada modelo.

Figura 119. *Evidencia modelo unión de ciudades*



Fuente: elaboración propia.

Conclusiones: Los estudiantes participaron activamente en los retos del subnivel 2 y 3, además trabajaron en equipo y entregaron las evidencias correspondientes.

En el subnivel 3 modalidad presencial, se evidenció el interés en los estudiantes sobre las superficies jabonosas y los resultados obtenidos por los modelos de cada problema de la Figura 75.

Subnivel 3

Reto 2: Teorema de los cuatro colores

Cada uno de los estudiantes inventaron el nombre de un país y la construcción de su croquis. Luego, los estudiantes dividieron su país por medio de departamentos. Por último, se les pidió que pintaran los diferentes departamentos por medio de cuatro colores teniendo en cuenta que dos departamentos que comparten frontera no pueden tener el mismo color.

Conclusiones: En la resolución del reto algunos estudiantes hicieron uso de la aplicación Paint para ser mucho más fácil el proceso de colorado.

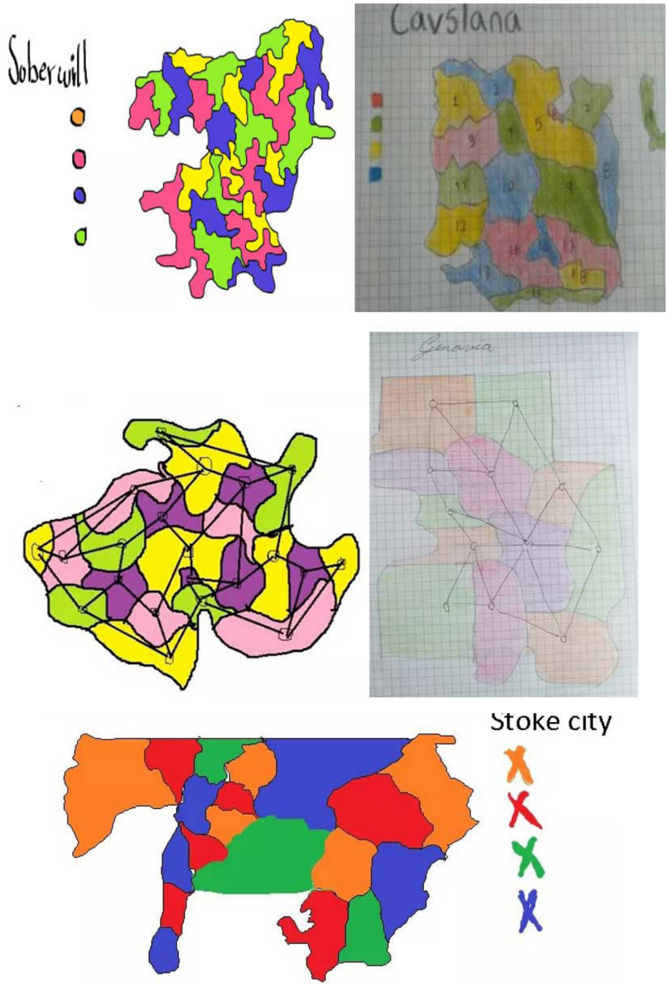
Se evidenciaron en los dos cursos una mayor participación y entrega de evidencias.

Figura 120. *Evidencia construcción de países 10.1*

Fuente: elaboración propia.

Algunos estudiantes del curso 10.1, desarrollaron el grafo asociado al país desarrollado.

Figura 121. *Evidencia construcción de países 10.2*



Fuente: elaboración propia.

Subnivel Superior

En el subnivel superior se dejó un reto para ser elaborado en casa, este consistía en colorear el mapa Mc Gregor, que posee 110 regiones.

Algunos estudiantes se les dificulto culminar el reto, otros estudiantes lo culminaron sin ninguna dificulta mencionando que fue un reto entretenido, de mucha agilidad visual.

Figura 122. *Evidencia reto Mc Gregor*

Fuente: elaboración propia.

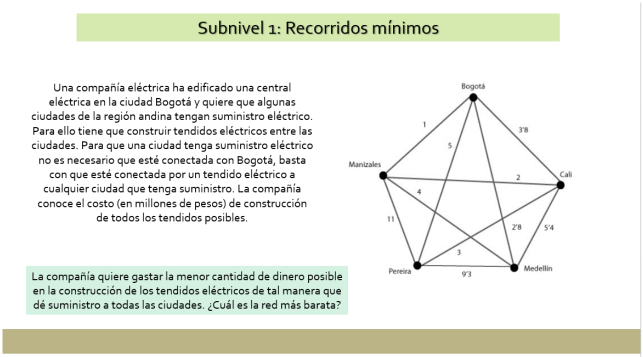
Proceso de comprensión

Para el proceso de comprensión de los conceptos de la temática de Teoría de Grafos trabajados en este nivel, se implementó actividades en los espacios de contextualización y evaluación de conocimientos aprendidos.

Actividades de contextualización

Actividad N.° 1: Después de la finalización del subnivel 1 se generaron algunos intercambios orales con los estudiantes con el propósito de identificar caminos o recorridos mínimos por medio de diferentes ejercicios de grafos con peso y sin peso en las aristas Figura 73, 74 y 155.

Figura 123. *Apoyo visual - ejemplo de recorrido mínimos*



Fuente: elaboración propia.

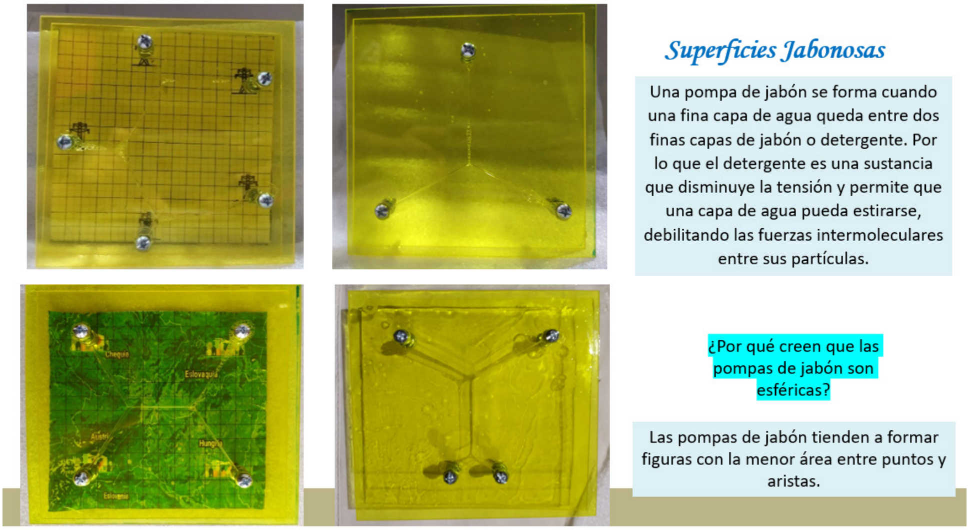
En las resoluciones del ejercicio se evidencio la comprensión de la temática.

Actividad N.° 2: Luego de la finalización del subnivel 2 presencial se desarrolló el espacio de contextualización sobre las superficies jabonosas, se les explico a los estudiantes como se compone una pompa de jabón, para luego preguntar:

¿Por qué creen que las pompas de jabón son esféricas? Algunos estudiantes no comprendieron la pregunta, pero una estudiante afirmo porque son la figura con la menor área posible de un volumen dado, como de un cubo, una pirámide, etc.

Luego de la finalización del subnivel 3, se socializaron los modelos obtenidos con las bombas de jabón.

Figura 124. *Apoyo visual pompas de jabón*



Fuente: elaboración propia.

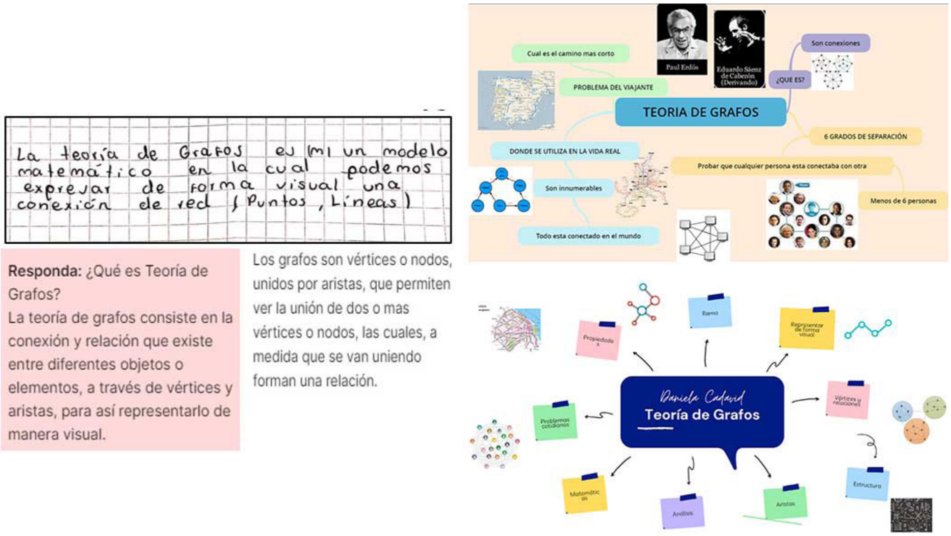
Las evidencias y vivencias recolectadas en la implementación mostraron la comprensión de los conceptos que abarca el 5° Nivel teoría de grafos.

Evaluación de conocimientos

Para la evaluación de conocimientos se llevó a cabo reflexiones por parte de los estudiantes sobre la pregunta ¿Qué es teoría de grafos? Teniendo en cuenta lo aprendido en los retos.

Los estudiantes definieron teoría de grafos como las conexiones que se desarrollan a una serie de datos representados por nodos o puntos, las conexiones entre cada nodo se representan por medio de aristas. Además, es una manera gráfica de sintetizar grandes cantidades de datos.

Figura 125. *Evidencia ¿Qué es teoría de grafos?*



Fuente: elaboración propia.

Componente evaluativo

Los componentes evaluativos se llevaron a cabo por medio de varias herramientas, se aplicó intercambios orales que permitió la comunicación asertiva entre estudiante-docente en la ejecución de los retos. Se implemento espacios de escritura referente a los procesos llevados a cabo para la solución de los retos. Además, de ejercicios prácticos y de registro, referente a las evidencias respectivas.

El componente con más relevancia en este nivel fue la competencia escrita, la participación, trabajo en grupo y actitudes favorables para el desarrollo de los retos que compone el 5° Nivel.

Conclusiones: 5° Nivel – Teoría de grafos

El curso 10.1 se destacó por su curiosidad sobre el hallazgo de recorridos mínimos por medio de las superficies jabonosas. Además, se evidencio el compromiso de los estudiantes en la resolución y entrega de evidencia en los retos.

En el curso 10.2 los estudiantes fueron muy participativos y competitivos por finalizar los retos para poder tener la delantera con la cantidad de letras de la profesión en juego.

Profesión del 5° Nivel

La política es la acción encargada en la toma de decisiones grupales, estableciendo las prioridades de una sociedad. Tiene autoridad política, económica y administrativa en asuntos oficiales de un país.

Tabla de posiciones: Los grupos que completaron la profesión del nivel fueron: 10.1 Karol Gigos y 10.2 Anueles.

Tabla 14. *Tabla posición 5° NIVEL*

NOMBRE DEL GRUPO 10.1	5° NIVEL
Karol Gigos	★★★
Los Tiburonsin	★★⯪
Las Yasuris Yamileth	★★
The Beatles	★⯪

NOMBRE DEL GRUPO 10.1	5° NIVEL
Shakiros	✪✪☾
Virtual	✪

NOMBRE DEL GRUPO 10.2	5° NIVEL
Harry Potter	✪✪☾
Will Smith	✪✪
Los Backyardigans	✪✪
Anueles	✪✪✪
SCP	✪
Virtual	✪✪

Fuente: elaboración propia.

Posiciones del juego Búsqueda de profesiones

Tabla 15. *Tabla posición final*

NOMBRE DEL GRUPO 10.1	1° NIVEL	2° NIVEL	3° NIVEL	4° NIVEL	5° NIVEL
Karol Gigos	✪☾	✪✪☾	✪✪	✪✪	✪✪✪
Los Tiburonsin	✪✪✪	✪☾	✪✪✪	✪✪☾	✪✪☾
Las Yasuris Yamileth	✪	✪✪✪	✪✪	✪✪☾	✪✪
The Beatles	✪	✪✪	✪✪	✪✪	✪☾
Shakiros	✪✪	✪✪☾	✪	✪✪✪	✪✪☾
Virtual	✪	✪	☾	☾	✪

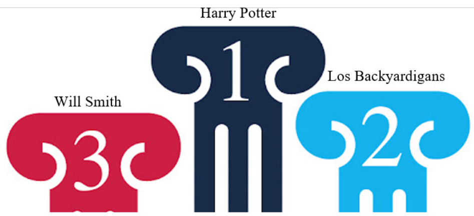
NOMBRE DEL GRUPO 10.2	1° NIVEL	2° NIVEL	3° NIVEL	4° NIVEL	5° NIVEL
Harry Potter	★★	★★★	★★	★★	★★½
Will Smith	★★	★★	★★	★★★	★★
Los Backyardigans	★★★	★★	★★	★★	★★
Anueles	★½	★	½	★★	★★★
SCP	★	★★	★★★	★	★★
Virtual	★	★★	★★	★	★

Fuente: elaboración propia.

Figura 126. *Ranking*

a) Ranking. 10.1

b) Ranking. 10.2



Fuente: elaboración propia.

Carrera final

En base a la posición en el ranking los grupos eligieron de las cuatro opciones de carro posibles (Figura 31) el que mejor convenía para competir en la carrera final. Cada una de las construcciones de los robots tenía un diferente grado de complejidad, además de desventajas en el funcionamiento.

A cada uno de los grupos se les hizo entrega del manual y las partes correspondiente del robot elegido.

Figura 127. *Evidencias construcciones de carros*

Fuente: elaboración propia.

En las diferentes construcciones por los grupos se desarrolló asesoramiento sobre los posibles errores a cometer o sugerencias. Algunos grupos fueron muy agiles en elegir un estudiante líder, uno de control de piezas y los demás integrantes como constructores por cada una de las secciones del robot. Otros grupos prefirieron que solo un estudiante fuera el que armara el robot, mientras que los demás integrantes vigilaban su construcción.

La mayoría de los grupos finalizaron su robot, pero solamente un grupo de cada curso se les dificulto terminar de armar el robot Slither, debido a que su construcción requería de un trabajo en equipo y de vigilancia para no cometer errores.

Entregable final

Cada uno de los grupos tenía que entregar una revista como producto final del juego, esta debía contener un resumen de los contenidos o temáticas vistas en el desarrollo de cada nivel.

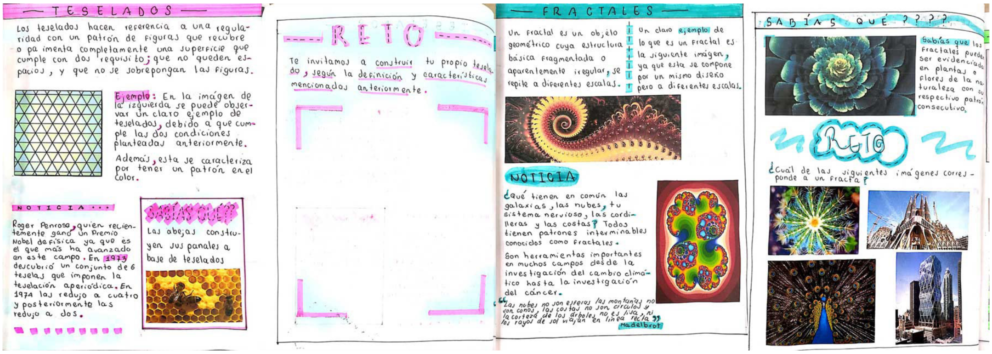
Para la elaboración de la revista se dispuso de una sección y media de clase, las dinámicas para los estudiantes en modalidad virtual fueron, la asignación al azar de una temática por cada estudiante y la facilidad de construcción de manera digital. La dinámica para los estudiantes en modalidad virtual fue la elección de líderes por cada grupo; líder de contenido, grafico, de revisión y de edición. La elección de líderes se desarrolló con el fin que la construcción de la revista se desarrollara en equipo.

En la elaboración de las revistas se evidencio, el aprovechamiento del tiempo por algunos grupos, la colaboración en equipo y la creatividad de los estudiantes.

Las revistas por destacar fueron:

Grupo Harry Potter: Los estudiantes desarrollaron un revista que involucraba al lector para participar en la elaboración de retos por cada una de las temáticas como construcción de teselado, análisis de imágenes, cuerdas, sopa de letras y coloreado. Además, agregaron secciones de noticias y curiosidades por temática Anexo 1.

Figura 128. *Evidencias revista Harry Potter*



Fuente: elaboración propia.

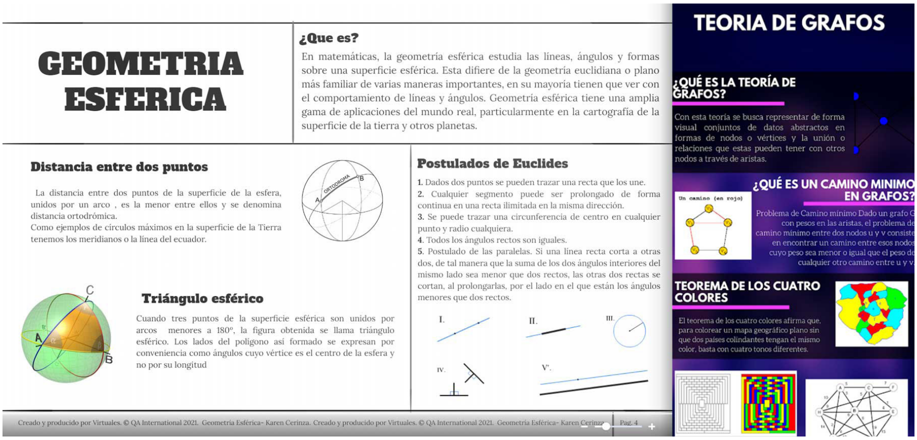
Grupo Los Shakiros: Los estudiantes desarrollaron una revista basada en información referente a cada una de las temáticas vistas en el juego Anexo 2.

Figura 129. *Evidencias revista Los Shakiros*

Fuente: elaboración propia.

Estudiantes modalidad virtual:

Figura 130. *Evidencias estudiantes modalidad virtual*



Fuente: elaboración propia.

Con lo anterior se dio cierre al juego Búsqueda de Profesiones. La implementación se llevó en su totalidad como estaba estructurado previamente, las evidencias recolectadas tanto físicas, digitales, como análisis de comportamientos, actitudes de los estudiantes, dieron a entender el interés que dio la estructura del juego y además, el agrado en la construcción de conocimientos por medio de diversos retos o actividades.

Figura 131. *Estudiantes de grado décimo*

Fuente: elaboración propia.

Se pudo observar un cambio frente a la visión de conceptos geométricos y por consiguiente a la matemática, dejando en evidencia que la enseñanza puede ser dinámica, entretenida y divertida. De esta manera se concluyó, que el juego aporto a los estudiantes no solo saberes, sino también intereses hacia la matemática o geometría en un ámbito profesional, además fomento la comunicación, trabajo en equipo, impulso la creatividad e innovación.

Capítulo 3

Evaluación del juego

El juego Búsqueda de profesiones abordaba la enseñanza de conceptos de matemática avanzada (Teselados, Fractales, Geometría Esférica, Topología y Teoría de Grafos), este se estructura por medio de cinco niveles entorno a cada una de las temáticas, una carrera final y la realización de una revista como evidencia de los contenidos aprendidos.

La implementación del juego mediada por la alternancia es un desafío, debido a que las algunas actividades o retos planeadas se ajustan a ser trabajadas de manera presencial mas no de manera virtual, por lo tanto, cuando se implementaban se tenía que trabajar para los estudiantes presenciales y virtuales los cuales al combinar ambas se presentaban inconvenientes de tipo explicativo e inclusive de entendimiento.

Para la evaluación del juego por parte de los estudiantes se llevó a cabo un cuestionario de cinco preguntas en las que los estudiantes daban la valoración del juego Búsqueda de Profesiones.

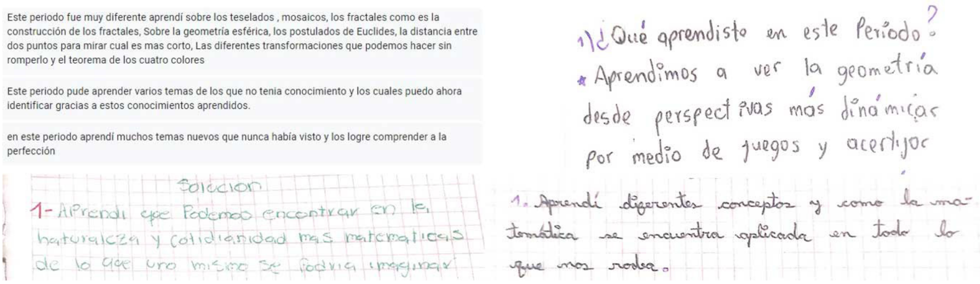
Preguntas:

1. ¿Qué aprendiste en este cuarto periodo?
2. ¿Qué nivel te llamo la atención? Y ¿Por qué?

3. ¿Qué te agrado de las sesiones de clase?
4. ¿Qué te disgusto de las sesiones de clase?
5. ¿Cómo se podría mejorar el juego Búsqueda de Profesiones?

Algunos estudiantes afirmaron que en el transcurso de periodo aprendieron que tanto las matemáticas como la geometría no solo son ecuaciones, sino hacen parte del entorno en el que vivimos. Además, remarcaron que aprendieron temáticas completamente diferentes de una manera divertida e interesante.

Figura 132. *Evidencias valoración actividad pregunta 1*


Este periodo fue muy diferente aprendí sobre los teselados , mosaicos, los fractales como es la construcción de los fractales, Sobre la geometría esférica, los postulados de Euclides, la distancia entre dos puntos para mirar cual es mas corto, Las diferentes transformaciones que podemos hacer sin romperlo y el teorema de los cuatro colores

Este periodo pude aprender varios temas de los que no tenia conocimiento y los cuales puedo ahora identificar gracias a estos conocimientos aprendidos.

en este periodo aprendí muchos temas nuevos que nunca había visto y los logre comprender a la perfección

Solución
1- Aprendi que Podemos encontrar en la naturaleza y cotidianidad mas matematicas de lo que uno mismo se podria imaginar

1) ¿Qué aprendiste en este Periodo?
* Aprendimos a ver la geometría desde perspectivas más dinámicas por medio de juegos y acertijos

1. Aprendí diferentes conceptos y como la matemática se encuentra aplicada en todo lo que nos rodea.

Fuente: elaboración propia.

Referente a la segunda pregunta, los estudiantes se encaminaron al gusto del nivel dependiendo del reto o la actividad que les llamo más la atención. Los niveles de mayor preferencia fueron: Teselados, Fractales y Topología, estos debido a que son los niveles que se incorporó mayor cantidad de retos basabas en construcciones.

En la tercera pregunta, se tienen que el trabajo realizado por los dos cursos fue muy grato y fue calificado de manera positiva, ya que a través del juego pudieron comprender los temas de manera fácil e intuitiva, en comparación de entender un tema de manera teórica el cual puede necesitarse más tiempo para su comprensión. Además, los estudiantes afirmaron que las clases eran muy lúdicas, creativas y didácticas.

Figura 133. *Evidencias valoración actividad pregunta 3*

Que las clases fueron didácticas

la disposición de la profesora al momento de explicar las actividades, pues fueron actividades dinámicas las cuales ayudan al aprendizaje.

lo que me ha agradado es que en todas las clases han sido muy participativas y didácticas

Las actividades dinámicas realizadas

la variedad de actividades

Lo que mas me agrado fue que las secciones de la clase se presentaban de una forma entretenida para ver las cosas y saber de estas

3-Me agrado trabajar en grupo y que la clase fue didactica y, insentivo mi lado competitivo

3. En general me agrado que en las secciones se trabajaban diferentes temas, con diferentes actividades.

Me gusto que todas las clases eran didacticas y a la hora de recordar un tema recuerdo la actividad

Fuente: elaboración propia.

Continuando con la pregunta cuatro, la participación de los estudiantes en las diferentes etapas realizadas en cada nivel se ve afectado en gran medida de manera virtual, esto, debido a que no es lo mismo estar presente en un aula de clases donde se puede llegar a ser muy espontaneo por la participación de las actividades, a trabajar desde casa donde no se perciben las interacciones sociales.

Algunos estudiantes mencionaron que los tiempos de las actividades eran muy cortos los cuales no permitieron que se pudiera interactuar más y poder así obtener un conocimiento más profundo. Por otro lado, otros estudiantes mencionaron que la competencia llevada a cabo en los niveles y subniveles hacía que se perdiera el foco real de aprender los diferentes temas, esto debido a que se generaban rivalidades para conseguir cada una de las letras de la profesión en juego. Es de recalcar que los componentes de restricción de tiempo y competitividad son elementos que hace parte de los escenarios gamificados.

Figura 134. *Evidencias valoración actividad pregunta 4*

Lo que mas me disgusto de las la clase generalmente fue que a los virtuales en ciertas ocaciones nos dejaban a un lado, mientras que la clase interactuaba mas con los presenciales

nada en realidad algunas cosas se me complicaban pero nada mas

lo que no gusto es que cuando habia semana de alternansia paa nosotos los virtuales era muy dificil para nosotroso entender y muchas veces nos perdiamos un poco, pero en lo demas todo bien.

NO me gusto que fuera una competencia porque me desconcentraba de lo que es importante Aprender

4. El desorden y la envidia que se puede llegar a generar en las clases

Fuente: elaboración propia.

Por último, como puntos a mejorar o tener en cuenta en el juego realizado, se recalcó por parte de los estudiantes que, en vez de ganar letras, se dieran pistas las cuales ayudaran a identificar la profesión por la cual se estaba participando. Algunos otros, mencionaron que se deberían de entregar más letras e inclusive, que las letras no fueran entregadas al primero que finalizara el reto, sino que estas también fueran entregadas a quienes hayan tenido mayor participación. Por otro lado, mencionaron que hubiera sido genial que las profesiones en juego tuvieran relación con los intereses de los jugadores, a su vez, la incorporación de más profesiones y temáticas.

Teniendo en cuenta las opiniones de los estudiantes, el trabajo realizado en el juego fue significativo para ellos, ya que de alguna manera pudieron profundizar sobre las ramas de las matemáticas e inclusive obtuvieron otro concepto del que ya tenían.

Bibliografía

Archimedes, Tub.(2018). El quinto en discordia. Archimedes' Tub. https://www.archimedestub.com/tag/paralelas/feed/

Aula Abierta. (2020). La importancia del juego para el aprendizaje. Aula Abierta. https://aulaabierta.info/gamificacion-la-importancia-del-juego-a-la-hora-de-aprender/

Barraza, O. y Reyes, R. (2012). Introducción al estudio de las geometrías no euclidianas a través de la geometría esférica desde una perspectiva docente. [Tesis de pregrado, Universidad de Santiago de Chile]

Capítulo VI: Sobre la esfera. (2006). Capítulo VI: SOBRE LA ESFERA. http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/No%20euclidianas/Secciones/Indice.htm

Caicedo, A., Wagner de García, G. y Méndez, R. M. (2010). Introducción a la Teoría de Grafos (1ª ed.). Ediciones Elizcom.

Cagliani, M. (2015). ¿QUÉ ES EL MÉTODO CUALITATIVO? Tendenzias.com. https://tendenzias.com/ciencia/que-es-el-metodo-cualitativo/

Celemín, J. (2017). Transposición didáctica de los conceptos de análisis combinatorio y probabilidad, en educación básica y media de la institución educativa francisco josé de caldas de santa rosa de cabal, Risaralda año 2016. [Tesis de maestría, Universidad Tecnológica De Pereira]. https://iefcojosedecaldassrcrda.com/attachments/5116C392.pdf

Chevallard, Y. (1985). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado (3.ª ed.). AIQUE Grupo editorial.

Chevallard, Y. (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 1, 146-157.

Cuellar, G. (1988). Aplicación de la teoría de grafos a la contabilidad. Revista Entornos, 1(2), 40-48.

Delacruz, G. (2011). Games as Formative Assessment Environments: Examining the Impact of Explanations of Scoring and Incentives on Math Learning, Game Performance, and Help Seeking. CRESST Report 796. National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing (CRESST).

De Olaizola, I. (2008). ¿Imposturas fractales? Diseño y Sociedad, (17), 42-47.

Devia, R., y Pinilla, C. (2012). La enseñanza de la matemática: de la formación al trabajo de aula. Educere, 16(55), 361-371. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35626140019

Fernández, A. (2006). Metodologías activas para la formación de competencias. Educatio siglo XXI, 24, 35-56. http://revistas.um.es/educatio/article/view/152

Ferreira, M. y Ortilez, Y. (2012). Transposición didáctica en el uso de los espejos como estrategia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los polígonos y poliedros. En Sarco, A. (Eds.). Complejidad y Transdisciplinaridad en Educación, XIV Jornada de investigación educativa y V internacional de educación. (pp. 40-84). Centro de Investigaciones Educativas. Escuela de Educación, Edif. Trasbordo, P.B., Ciudad Universitaria de Caracas.

Ferreira, B., y Santos, G. (2018). Gamification as a didactic strategy in teacher education. Tendencias Pedagógicas, 31, 113-126.

Figueredo X. (2009). Transposición Didáctica en el estudio de los triángulos. Universidad Pedagógica El Libertador, Aragua Venezuela.

Font, V., Breda, A., Sala, G. S. (2015). Competências profissionais na formação inicial de professores de matemática. Práxis Educacional, Vitória da Conquista, 11(19), 17-34.

Franzcpc. (2018). ¿Qué son las distancias geodésicas? El blog de franz. https://acolita.com/las-distancias-geodesicas/

Fuster, D. (2019). Investigación cualitativa: Método fenomenológico hermenéutico. Propósitos y representaciones, 7(1), 201-229.

Gairín, J.M. y Muñoz, J.M. (2006). Moviendo fichas hacia el pensamiento matemático. Suma, (51, 15-21). https://www.researchgate.net/profile/Jose-M-Munoz-Escolano/publication/39221957_Moviendo_fichas_hacia_el_pensamiento_matematico/links/544e2fff0cf29473161a2a4e/Moviendo-fichas-hacia-el-pensamiento-matematico.pdf

Gardey, A., y Pérez J. (2009). Fractal. Definiciones.de. https://definicion.de/fractal/

Gavilanez, Y., y Zavala, J. (2010). Los Juegos Didácticos En El Desarrollo Del Pensamiento, [Tesis de Licenciatura Universidad Estatal de Milagro de Ecuador 2010]. Archivó digital. http://repositorio.unemi.edu.ec/handle/123456789/2501.

Godino, J. D., y Ruíz, F. (2003). Geometría y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Goetz, J., y Lecompte, M. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Morata, S.A. https://upeldem.files.wordpress.com/2018/03/libro-etnografc3ada-y-disec3b1o-cualitativo-en-investigacic3b3n-educatica-j-p-goetz-y-m-d-lecompte.pdf

Gómez, F. y González, D. (2013). Propuesta para la enseñanza de movimientos rígidos en el plano a partir de teselados. pp. 610-613.

Gómez, M. (2005). LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA: HISTORIA DE UN CONCEPTO Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (Colombia), 1(1), 83-115.

Gómez, A y González, D. (2013). Propuesta para la enseñanza de movimientos rígidos en el plano a partir de teselados. Revista Científica, *547* (550).

González, H. L. (2018). La Geometría Fractal en el proceso de actualización cartográfica. [Tesis de pregrado, Doctoral dissertation, Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas]. http://dspace.uclv.edu.cu:8089/handle/123456789/10287

GRAPH. (s.f.). Teoría de grafos. GRAPH. https://www.grapheverywhere.com/teoria-de-grafos/

Guba, E., y Lincoln, Y. (2002). Paradigmas en competencia en la intestigación cualitativaa. En Denman, y Haro, Antología de los métodos cualitativos en la investigación social (págs. 113-145).

Gutiérrez, X., y Parraguez, M. (2018). Elementos para una propuesta de transposición didáctica de un conjunto de fractales geométricos en el nivel escolar. En Serna, L. y Páges, D. (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 483-489). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gutiérrez Mazorra, E. (2020). Actividades introductorias de los grafos en las matemáticas de secundaria.

Guzmán, M., (s.f.). Tendencias actuales de la educación matemática. Catedra UCM Miguel de Guzmán. http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/tendencias-actuales-de-la-educacion-matematica/

Hamzah, W., Ali, N., Saman, M., Yusoff, M., y Yacob, A. (2015). Influence of gamification on students' motivation in using e-learning applications based on the motivational design model. International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET), 10(2), 30-34.

Hernández, M., y García, B. (2017). Currículum y práctica docente: hacia una educación transformadora. Conferencia llevada a cabo en el XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa, San Luis Potosí, México.

Hunicke. M., LeBlanc, M., y Zubek, R. (2004). MDA: A Formal Approach To Game Desingn And Game Research, Evanston, IL: Northwestern University.

Husserl, E. (1998). Invitación a la fenomenología. Barcelona: Paidós.

Idrovo. E. (2018). La gamificación y su aplicación pedagógica en el área de matemáticas para el cuarto año de EGB, de la unidad educativa CEBCI, sección Matutina, año electivo 2017-2018 [Tesis de pregrado, Universidad Politécnica Salesiana]. Archivo digital. https://dspace.ups.edu.ec/bitstream/123456789/16335/1/UPS-CT007954.pdf

ICHI.PRO. (s.f.) Problemas comunes de la teoría de grafos. ICHI.PRO. https://ichi.pro/es/problemas-comunes-de-la-teoria-de-grafos-222758686975473

Julio, C. (2014). Transposición didáctica para el aprendizaje del contenido dinámica. [Tesis de postgrado, Universidad de Carabobo]. http://www.riuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/123456789/6133/1/juliorios.pdf

López, L., Franco, S., y Reynoso, A. (2021). Gamificación: una estrategia de enseñanza de las matemáticas en secundaria. EDUCATECONCIENCIA, 29 (Especial), 124 - 146. http://tecnocientifica.com.mx/educateconciencia/index.php/revistaeducate/article/view/397

Lozana, W., Sierra, W., y Doctorando, U. T. El proceso de la modelación y aplicación de las matemáticas, competencias y evaluación. HACER Y SABER, N° 1 / Julio – Diciembre 2012 - p. 140-152

Macho, M. S. (2004). ¿Qué es la topología?. Sigma, 20, 63- 77. http://www.ehu.es/~mtwmastm/sigma20.pdf

Mandelbrot BB. (1975). Les objectes fractales: forme, hasard et dimension. Flammarion. París, Francia.

Marcos Martín, J. (2020). Topología de superficies para una propuesta extracurricular en Matemáticas.

Matemáticas: importancia y desafío (2020). EXPLORA DIVISIÓN CIENCA Y SOCIEDAD, Ministerio de Ciencia, Tecnología, Conocimiento e Innovación Gobierno de Chile. https://www.explora.cl/blog/matematicas-importancia-y-desafio/

UDEC
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

ISBN: 978-628-7621-03-9

9 786287 621039