

Universidad de Cundinamarca

Repositorio CTel

Educación

Libros

Summer 7-30-2024

Aplicación de la serie de Fourier en la eliminación de armónicos musicales para obtener un tono puro

Kelly Johana Infante Beltrán

Néstor Orlando Forero Díaz

Adalberto Pardo Rodríguez

Follow this and additional works at: <https://repositorioctei.ucundinamarca.edu.co/educacion>



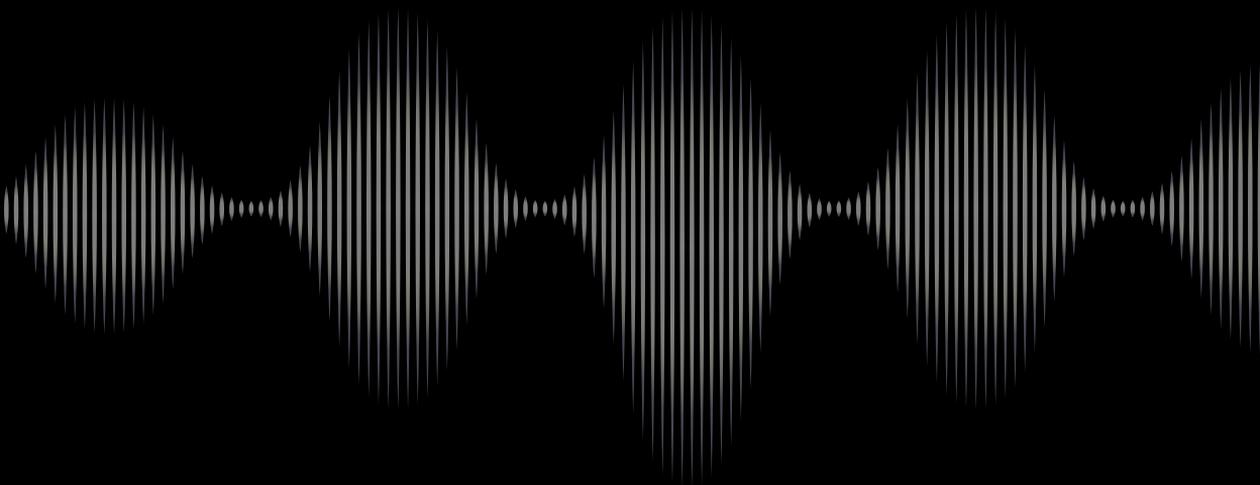
Part of the [Health and Physical Education Commons](#), [Medicine and Health Sciences Commons](#), and the [Physical Sciences and Mathematics Commons](#)

APLICACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER

EN LA ELIMINACIÓN DE
ARMÓNICOS MUSICALES

PARA OBTENER UN TONO PURO

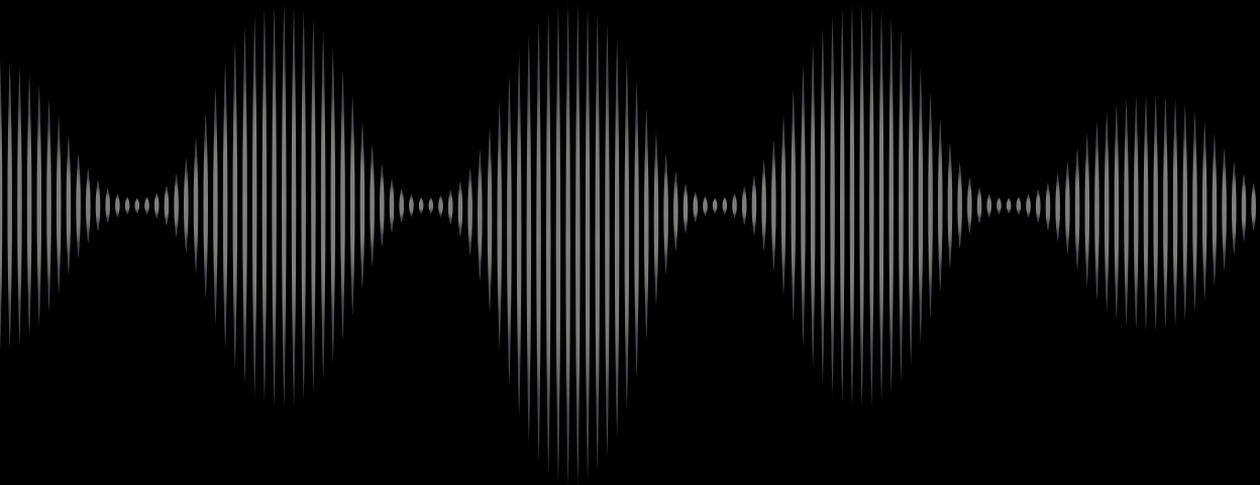
KELLY JOHANA INFANTE BELTRÁN | NÉSTOR ORLANDO FORERO DÍAZ
ADALBERTO PARDO RODRÍGUEZ



APLICACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER

**EN LA ELIMINACIÓN DE
ARMÓNICOS MUSICALES**

PARA OBTENER UN TONO PURO



APLICACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER

**EN LA ELIMINACIÓN DE
ARMÓNICOS MUSICALES**

PARA OBTENER UN TONO PURO

**Kelly Johana Infante Beltrán
Néstor Orlando Forero Díaz
Adalberto Pardo Rodríguez**

Autores: Infante Beltrán, K. J.; Forero Díaz, N. O., y Pardo Rodríguez, A.
Aplicación de la serie de Fourier en la eliminación de armónicos musicales para obtener un tono puro, Fusagasugá, Cundinamarca, Colombia,
Sello Editorial, Universidad de Cundinamarca

—Matemáticas. —Programas Visualiser. —Programa MATLAB. —Música. —Armónicos musicales.
Fusagasugá: Sello Editorial Universidad de Cundinamarca
2024, 112 páginas; 16,5 cm x 23,3, contiene figuras y tabla.
Incluye referencias bibliográficas

ISBN: 978-628-7702-07-3
eISBN:978-628-7702-08-0



Derechos reservados
1.ª edición, 30 de julio de 2024

© Kelly Johana Infante Beltrán
Néstor Orlando Forero Díaz
Adalberto Pardo Rodríguez, autores

© Universidad de Cundinamarca

John Alexander Moreno Sandoval
DIRECTOR EDITORIAL

Daniel Alonso Mattern Hernández
COORDINADOR EDITORIAL

César Augusto Buitrago Quiñones
EDITOR DE PUBLICACIONES

César Augusto Buitrago Quiñones
CORRECCIÓN DE ESTILO

Paula Karina Martínez Camelo
DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN

Impresión: Multi Impresos S.A.S.

Universidad de Cundinamarca
Fusagasugá, Colombia
Diagonal 18 No. 20-29
Teléfono: (+571) 828 1483
editorial@ucundinamarca.edu.co
<https://www.ucundinamarca.edu.co>

Primera edición, 2024

Esta obra tiene una versión de acceso abierto disponible en el Repositorio Institucional de la Universidad de Cundinamarca: <https://repositorio.ucundinamarca.edu.co>
Universidad de Cundinamarca
Vigilada MINEDUCACIÓN

CONTENIDO

→ INTRODUCCIÓN	13
→ CAP. 1	
ARTE Y CIENCIA DEL OÍDO MUSICAL: EXPLORANDO LOS VÍNCULOS	17
1.1. EL SISTEMA AUDITIVO HUMANO	17
1.1.1. El oído humano	18
1.1.2. Fisiología y capacidad auditiva	19
1.1.3. Esquema de funcionamiento	21
1.2. ARMÓNICOS Y VIBRACIÓN	22
1.2.1. Frecuencia y periodo	22
1.2.2. Frecuencia y armónicos	23
1.2.3. Ternas y escala pitagórica	26
1.2.4. Armónicos en la guitarra y serie armónica	27
1.3. VIBRACIÓN	31
1.3.1. Vibración simple y compuesta	31
1.4. FENÓMENO ACÚSTICO: ESPECTRO Y ONDAS	32
1.4.1. Ondas: velocidad, longitud y atenuación	32
1.5. SERIE DE FOURIER Y LA ELIMINACIÓN DE ARMÓNICOS MUSICALES	33
1.5.1. Ecuación de la onda en la cuerda vibrante	33
1.5.2. Transformada rápida de Fourier	40
1.5.3. Generalidades: funciones periódicas. Series trigonométricas	46
1.5.4. Transformada de Fourier	48
1.5.5. Serie de Fourier de funciones pares e impares	55
1.5.6. Integrales de Fourier de cosenos y senos	57
1.5.7. Serie de Fourier y análisis armónico	57
1.5.8. Propagación del sonido	61

→ CAP. 2	
APLICACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER PARA OBTENER UN TONO PURO	63
2.1. MATLAB: APLICACIÓN DE LA “FFT” EN UN SONIDO PARA OBTENER UN TONO PURO	64
2.1.1. Análisis de la 4ª cuerda al aire	66
2.1.2. Análisis de la 5ª cuerda al aire	70
2.1.3. Análisis de la 6ª cuerda al aire	75
2.2. SONIC VISUALISER: OBSERVACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LOS ESPECTROS GENERADOS	79
2.1.1. Espectrograma de la 4ª cuerda al aire	80
2.1.2. Espectrograma de la 4ª cuerda al aire	80
2.1.3. Espectrograma de la 5ª cuerda al aire	81
2.1.4. Espectrograma 6ª cuerda al aire	82
2.3. COMPARACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS: MATLAB Y SONIC VISUALISER	84
→ CAP. 3	
EXPLORACIÓN Y UTILIZACIÓN DE LA SEXTA CUERDA AFINADA A 432 HZ: ANÁLISIS Y APLICACIÓN	95
3.3. ANÁLISIS Y APLICACIÓN SOBRE LA 6ª CUERDA AL AIRE EN FRECUENCIA DE 432 HZ	95
→ ANEXOS	101
RECURSOS Y DETALLES ADICIONALES	101
a. Códigos en MATLAB que permitieron desarrollar el análisis:	101
→ CONCLUSIONES	104
→ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	107

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Oído humano y sus partes.....	19
Figura 2. Ancho de banda crítico.....	20
Figura 3. Curvas de Fletcher y Munson.....	20
Figura 4. Notas musicales.....	26
Figura 5. Notas musicales en las cuerdas de la guitarra.....	28
Figura 6. Armónicos reconocidos en Do.....	29
Figura 7. Partes de la guitarra.....	29
Figura 8. Vibración simple y compuesta.....	31
Figura 9. Notas musicales en las cuerdas de la guitarra.....	32
Figura 10. Señal de la 4ª cuerda al aire.....	66
Figura 11. Espectro de amplitud en una sola cara de $y(t)$	68
Figura 12. Espectro de amplitud en una sola cara de $y(t)$ aplicando la FFT.....	68
Figura 13. Señal natural.....	69
Figura 14. Transformada de la señal.....	69
Figura 15. Espectrograma 4ª cuerda al aire.....	70
Figura 16. Tono puro.....	70
Figura 17. Espectro de la 5ª cuerda.....	71
Figura 18. Espectro de amplitud en una sola cara.....	72
Figura 19. Espectro de amplitud en una sola cara de $y(t)$ aplicando FFT.....	72
Figura 20. Espectro de la 5ª cuerda al aire.....	73
Figura 21. Espectro de la 5ta cuerda al aire.....	73
Figura 22. Espectrograma 5ª cuerda al aire.....	74
Figura 23. Tono puro.....	74
Figura 24. Espectro de la 6ª cuerda al aire.....	75
Figura 25. Espectro de la amplitud en una sola cara de $y(t)$	76
Figura 26. Espectro de amplitud en una sola cara de $y(t)$ aplicando la FFT.....	76
Figura 27. (a) Espectrogramas de la 6ª cuerda al aire.....	77
Figura 28. (b) Transformada inversa de la señal natural.....	78
Figura 29. Espectrogramas de la 6ª cuerda al aire señal natural	78
Figura 30. Filtro.....	79
Figura 31. Espectrograma 4ª cuerda al aire.....	80

Figura 32. Espectrograma 5ª cuerda al aire	82
Figura 33. Espectrograma 6ª cuerda al aire	83
Figura 34. Espectrogramas 4ª cuerda al aire.....	85
Figura 35. 4ª cuerda.....	85
Figura 36. MATLAB.....	86
Figura 37. Sonic Visualiser.....	86
Figura 38. Sonic Visualiser.....	87
Figura 39. MATLAB.....	87
Figura 40. SONIC VISUALISER.....	88
Figura 41. Sonic Visualiser.....	88
Figura 42. MATLAB.....	89
Figura 43. Sonic Visualiser.....	89
Figura 44. Sonic Visualiser.....	90
Figura 45. Sonic visualiser.....	90
Figura 46. SONIC VISUALISER.....	91
Figura 47. Sonic Visualiser.....	91
Figura 48. MATLAB.....	92
Figura 49. Sonic Visualiser.....	92
Figura 50. MATLAB.....	93
Figura 51. Sonic Visualiser.....	93
Figura 52. (a) Señal al natural 432 Hz.....	96
Figura 53. (b) Señal natural 440Hz.....	96
Figura 54. (a) Espectro una sola cara 432Hz.....	97
Figura 55. (b) Espectro una sola cara 440Hz.....	97
Figura 56. (a) Tono puro 432 Hz.....	98
Figura 57. (b) Tono puro 440Hz.....	98
Figura 58. (a) Señal natural.....	99
Figura 59. (b) Filtro FFT.....	99
Figura 60. Espectrograma Sonic Visualiser.....	100

INTRODUCCIÓN

Aplicación de la serie de Fourier en la eliminación de armónicos musicales para obtener un tono puro no solo desentraña los misterios de la relación matemático-musical, sino también explica cómo esta comprensión puede arrojar luz en diversos contextos. Esta obra ejemplifica la amalgama de matemáticas y música en una sinfonía armoniosa. Adicionalmente, no solo devela los misterios de la conexión matemático-musical, sino que introduce una perspectiva innovadora que va más allá de la simple aplicación de procedimientos estándares en las industrias informática y de sonido.

En el campo de la medicina —en un examen de audiometría— es esencial contar con un tono puro. Este examen evalúa la audición de manera precisa y es importante para evitar o detectar a tiempo la hipoacusia, que es la incapacidad para escuchar sonidos en uno o ambos oídos (Boix, 2012). Para los músicos —especialmente compositores y arreglistas— es crucial conocer los métodos más efectivos y precisos para obtener tonos puros, ya que esto facilita una afinación precisa del instrumento. Además, en el ámbito de la acústica, el análisis y la composición musical, la tecnología juega un papel importante. Por lo tanto, a través de herramientas como MATLAB y Sonic Visualiser se desarrolla una estructura que respalda la grabación, edición, reproducción e interpretación musical. El estudio de las series de Fourier les proporcionará una base sólida para generar un nuevo campo activo en el ámbito musical e investigativo. En este tipo de investigaciones se demuestra la importancia de la interacción entre disciplinas del conocimiento, como las Matemáticas y la Música.

Este texto profundiza en la intersección entre las matemáticas y la música cuando se utiliza la serie de Fourier como una herramienta de análisis en las cuerdas de la guitarra clásica. El propósito fundamental es lograr tonos de pureza y riqueza armónica que se consiguen

mediante el desarrollo de un simulador en MATLAB que aporta precisión y fundamentación a la investigación.

En relación con la problemática planteada al inicio de la investigación, se determina que la serie de Fourier posibilita la obtención de un tono puro en un sonido o señal acústica, específicamente en las cuerdas de la guitarra (4^a, 5^a, 6^a al aire).

Es relevante destacar que este objetivo se logrará mediante la formulación del objetivo general que consiste en aplicar la serie de Fourier para analizar la esencia de las ondas senoidales y eliminar los armónicos de un sonido para obtener un tono puro. En aras de alcanzar el desarrollo exitoso de la investigación, se establecerán objetivos específicos como analizar la aplicación de la serie de Fourier para la eliminación de armónicos musicales y se creará un simulador en el software matemático MATLAB que analizará el fenómeno de los armónicos musicales el cual logrará eliminar armónicos y obtener un tono puro.

Adicionalmente, se explora la generación de armónicos en las cuerdas de la guitarra, aprovechando Sonic Visualiser que aporta una dimensión visual a la experiencia auditiva para comprender más profundamente los fenómenos armónicos.

Como complemento a la investigación, se procederá a observar la generación de armónicos en las cuerdas de la guitarra (4^a, 5^a, 6^a) con el software musical Sonic Visualiser. Además, se destacará la importancia de generar bibliografía sobre aplicaciones de la teoría de Fourier en las áreas de Matemáticas, Música y Medicina.

En consecuencia, para respaldar la argumentación de la temática de la investigación, se hará una selección de contenidos. Se iniciará con apartado preliminar que relacionarán y describirán algunos de los términos, conceptos y teorías en los campos de la acústica y la música, lo que permitirá orientar la investigación. En el primer capítulo se empleará un marco teórico relacionado con la teoría de Fourier y su aplicación en el ámbito musical. En el tercer capítulo se llevará a cabo el análisis de la serie de Fourier y su aplicación en el sonido para obtener un tono puro, utilizando el simulador creado en MATLAB. Se realizarán tres muestras de señales acústicas producidas

por la guitarra clásica (cuerdas: 4^a, 5^a y 6^a al aire). Finalmente, se procederá a la observación de la generación de armónicos a través del software de análisis acústico Sonic Visualiser.

A medida que avanza la investigación, se resalta la necesidad de contextualizar la teoría de Fourier en aplicaciones específicas en campos variados, desde las matemáticas hasta la medicina. Este enfoque multidisciplinario subraya la versatilidad y relevancia de la teoría, demostrando cómo su comprensión influye y enriquece distintas áreas.

Es importante destacar que se planteará un capítulo adicional en el cual se llevará a cabo el estudio de la sexta cuerda al aire con una frecuencia de 432 Hz. El propósito de esto es establecer una comparación entre las dos frecuencias correspondientes a la sexta cuerda al aire (432 Hz y 440 Hz). En relación con el capítulo de anexos, su objetivo es mostrar y facilitar los códigos establecidos en Matlab para el desarrollo del simulador. Finalmente, se presentarán las conclusiones.

ARTE Y CIENCIA DEL OÍDO MUSICAL: EXPLORANDO LOS VÍNCULOS

1.1. EL SISTEMA AUDITIVO HUMANO

En el proceso de desarrollo de la investigación resulta fundamental establecer y definir conceptos que sentarán las bases para su construcción. En este sentido, se dará inicio abordando el sistema auditivo humano, el cual representa el último eslabón en la cadena sonora y posibilita la conversión de las ondas sonoras en señales eléctricas que posteriormente son transmitidas a través del nervio acústico hasta el cerebro, donde se lleva a cabo la interpretación del sonido (Merino, 2006).

Asimismo, para que la comprensión sea más completa, se hace esencial profundizar en los mecanismos fisiológicos del sistema auditivo, abordando aspectos fundamentales como la función del oído externo, medio e interno, así como en la transducción de ondas sonoras generadas por impulsos eléctricos. De esta manera, se explorarán las características perceptuales del sonido, como la frecuencia y amplitud, las cuales desempeñan un papel fundamental para la interpretación y apreciación de las experiencias auditivas.

En este contexto, se explorará a su vez la conexión entre la ciencia de la audición y la música, en la que se destaca la importancia de comprender el procesamiento del sistema auditivo humano y como este percibe los sonidos. Además de generar un enfoque multidisciplinario esencial para la investigación, que no solo busca abordar la teoría matemática detrás de las ondas sonoras, sino que también considera la interpretación y apreciación desde contextos musicales y humanos.

1.1.1. El oído humano

El sentido de la audición es aquel que permite percibir los sonidos y sus características fundamentales, como el volumen, tono, timbre y la dirección de la que provienen. Además, se destaca que su órgano receptor es el pabellón auditivo y su estructura se divide en tres partes: oído externo, oído medio y oído interno. A través de vibraciones, el sonido logra transmitirse al oído humano mediante una cadena de huesecillos: el martillo, el yunque y el estribo, lo que origina al mismo tiempo ondas en el líquido del oído interno, que generan estímulos, los cuales llegan al cerebro a través de los nervios auditivos superiores.

Oído externo: está recubierto de cilios y glándulas secretoras de cera que permiten a las ondas sonoras llegar al pabellón y las conduce a través del conducto auditivo hacia la membrana del tímpano. Es importante recordar que este oído está compuesto por el pabellón auditivo (oreja), el conducto auditivo y el tímpano.

Oído medio: es aquel por el que pasan mecánicamente las vibraciones. En él se encuentra una cavidad llena de aire en el hueso temporal, que está entre el tímpano y el oído interno. Ligados al tímpano y también entre sí, hay tres huesos diminutos: —martillo, yunque y estribo—, que transfieren las vibraciones del tímpano al oído interno.

Oído interno: llamado también laberinto, está compuesto por un complejo sistema de canales membranosos con un revestimiento óseo. En él se generan vibraciones y señales que, al ser codificadas y transformadas en impulsos electroquímicos, se propagan por el nervio acústico hasta llegar al cerebro (Merino, 2006).

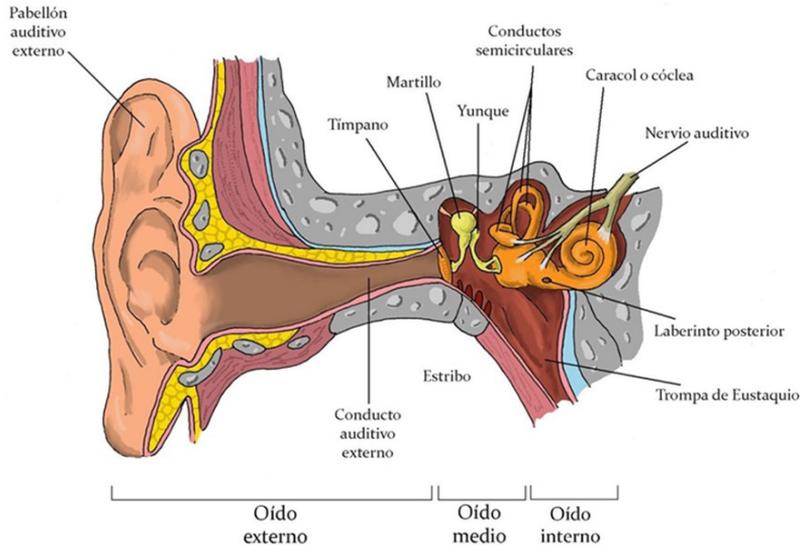


Figura 1. Oído humano y sus partes

Fuente: <http://www.cajondeciencias.com/Descargas20biologia/oido.jpg>

1.1.2. Fisiología y capacidad auditiva

El oído humano tiene la capacidad de percibir las frecuencias ubicadas entre 20 y 20.000 ciclos por segundo (Hz). La capacidad auditiva de las personas para reconocer un tono puro en presencia de ruido blanco y/o aleatorio da origen al concepto de *anchos de banda críticos*. Este término se emplea para hacer referencia a la capacidad que tiene el oído humano de filtrar la señal de sonido incidente, discriminando el ruido que se encuentra fuera de la banda crítica centrada en la frecuencia del tono puro representativo de la señal (Domingo, 2010).

En la imagen que se muestra a continuación (Figura 2), se encuentra un paralelo gráfico en donde hay ejes de comparación entre la frecuencia, ancho de banda crítico en (Hz) y el ancho de banda crítico en (dB), mostrando así que la frecuencia del sonido monoaural es diferente a la binaural.

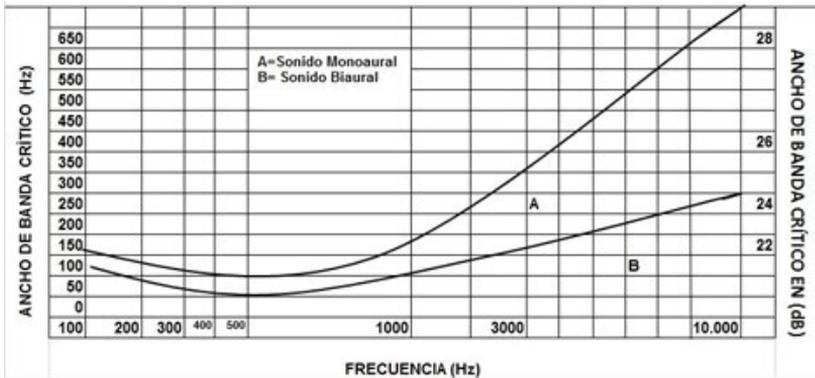


Figura 2. Ancho de banda crítico
Fuente: <http://www.cajondciencias.com>

Es importante resaltar que la forma en la que percibimos los sonidos no está separada de la frecuencia, relación que estudiaron Fletcher y Munson (1933), en lo que se denominó las curvas de Fletcher-Munson (Figura 3).

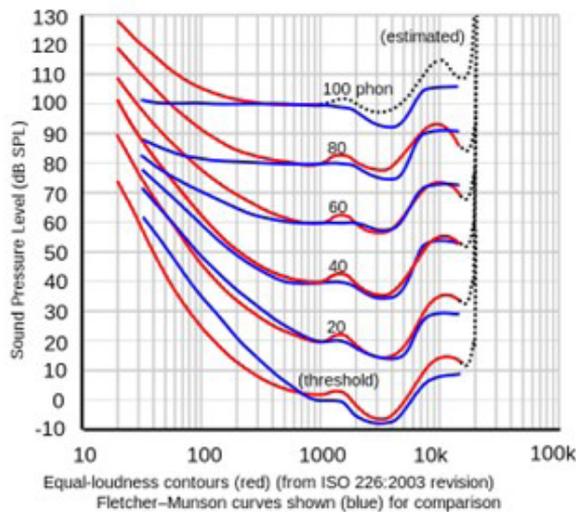


Figura 3. Curvas de Fletcher y Munson
Fuente: <https://www.hispasonic.com/reportajes/jugando-psicoacustica-ii-fletcher-munson/40662>

1.1.3. Esquema de funcionamiento

La generación de sensaciones auditivas en el ser humano es un proceso extraordinariamente complejo, que se desarrolla en tres etapas básicas:

1. Captación y procesamiento mecánico de las ondas sonoras.
2. Conversión de la señal acústica (mecánica) en impulsos nerviosos y transmisión de dichos impulsos hasta los centros sensoriales del cerebro.
3. Procesamiento neuronal de la información codificada en forma de impulsos nerviosos (Zwicker, E. y Fastl, H. 1990).

Se establece como unidad de medida de percepción de sonoridad el fonio, el cual tiene una equivalencia al dB para una frecuencia de 1 kHz. Además, se presentan curvas para valores de 0, 20, 40, 60, 80 y 100 fonios (unidad de medida logarítmica usada para indicar sonoridad). Cuando se establecen niveles de intensidad altos, la curva de igual sonoridad es más plana que la de niveles bajos, por lo que se denota menor sensibilidad en frecuencias bajas. Mientras que la curva que muestra 0 fonio corresponde al umbral de percepción sonora.

Asimismo, se puede establecer una idea de los niveles en la vida cotidiana; algunos de ellos se muestran a continuación con pautas aproximadas (Saposhkov, 1983):

- 0 fonio corresponde al umbral de percepción.
- 20 fonios equivalen al ruido de fondo en un estudio de grabación.
- 50 fonios a una conversación en voz baja.
- 70 fonios, el ruido ambiente en una oficina.
- 90 fonios a una conversación a gritos.
- 120 fonios en un *tutti fortísimo* de una orquesta sinfónica.

Es por lo anterior que la comprensión de la generación de sensaciones auditivas del ser humano se fundamenta como un proceso complejo

que abarca desde la capacitación mecánica de ondas sonoras hasta el proceso neuronal que se requiere para codificar la información en impulsos nerviosos. Respecto a la instrucción al fonio como unidad de medida de la percepción de sonoridad, se ha proporcionado una herramienta fundamental para comprender los niveles de intensidad sonora y su influencia en la vida cotidiana.

1.2. ARMÓNICOS Y VIBRACIÓN

1.2.1. Frecuencia y periodo

El oído humano es capaz de reconocer solo los sonidos que se encuentran dentro de un rango específico de amplitud y frecuencia. La frecuencia de los sonidos se establece por una longitud de onda, que se mide en Hercios (Hz) (Tipler, 2006). Lo anterior permite que el oído sea capaz de capturar sonidos que están en un rango específico entre 20 Hz y 20.000 Hz. Pero ¿qué sucede realmente si la frecuencia no se encuentra en el rango especificado? Si esto no se cumple, básicamente el oído no percibirá sonidos que superen los 20.000 Hz, pero si la frecuencia está por debajo de los 20 Hz, sentiremos la vibración, pero no la oiremos. Este fenómeno subraya la notable capacidad del oído humano para discriminar y procesar selectivamente las frecuencias sonoras dentro de un espectro determinado.

Por otro lado, el periodo (T) es el valor de tiempo que separa dos puntos en el mismo estado. Además, se entiende la frecuencia de la oscilación como el inverso del periodo mediante la siguiente ecuación:

$$f = \frac{1}{T} \quad (1)$$

Representando el número de pulsaciones en cada segundo. Por otro lado, si se expresa el *Movimiento Armónico Simple* en función de la frecuencia, se obtiene la siguiente ecuación:

$$T = \frac{\omega}{2} \pi \quad (2)$$

Así obteniendo finalmente:

$$f(t) = A \sin(2\pi ft) \quad (3)$$

1.2.3. Frecuencia y armónicos

La frecuencia cuya resonancia es la más baja en un objeto vibrante se establece como frecuencia fundamental; en relación con la mayoría de los objetos vibrantes, se tienen más de una frecuencia de resonancia. Sin embargo, los instrumentos musicales vibran normalmente a frecuencias armónicas de la fundamental, por lo que se define armónico como el múltiplo entero de la frecuencia fundamental. En efecto, la anterior definición permite llegar a la fórmula que generaliza y estandariza las frecuencias de cada una de las cuerdas de la guitarra.

Un armónico se define como el múltiplo entero de la frecuencia fundamental, que lleva a considerarlo como un concepto esencial para comprender la complejidad y riqueza de los sonidos que se producen por instrumentos musicales. Las vibraciones armónicas de las cuerdas de la guitarra siguen patrones que se determinan por la relación que existe entre la frecuencia fundamental y sus armónicos.

La definición de armónicos y frecuencias armónicas genera una base teórica para formular ecuaciones que generalizan y estandarizan las frecuencias de las cuerdas de la guitarra y otros instrumentos musicales, lo cual lleva a comprender principios fundamentales para la fabricación de instrumentos, ya que les permite ajustar y afinar adecuadamente los componentes para lograr la calidad tonal que se desea.

En la Antigüedad fue Pitágoras (580-495 a.C.) quien observó de forma detallada que una cuerda tensa que vibra a una frecuencia, por ejemplo, de 440 Hz, la mitad de esa cuerda vibra al doble

de esa frecuencia, es decir, 880 Hz. Esto generó el desarrollo del siguiente proceso:

Inicialmente, se divide el intervalo [440 Hz, 880 Hz] en doce partes iguales, recalculando esto de forma logarítmica, pues así lo percibe el oído humano. Según la ley de Weber-Fechner, se tiene que (Kreyszig, 2013):

$$d_p = k \frac{ds}{s} \quad (4)$$

Donde d_p hace referencia al cambio percibido en el estímulo y S corresponde a la magnitud del estímulo.

Realizando la integral de la ecuación anterior, se obtiene:

$$P = k \ln S + C \quad (5)$$

C es la constante de interacción. Para determina el valor de C , se le asigna P el valor de 0 cuando S es el umbral de percepción s_0 , entonces:

$$C = -k \ln s_0 \quad (6)$$

Por lo que:

$$P = k \ln \left(\frac{S}{s_0} \right) \quad (7)$$

Notando así que la percepción de una señal de frecuencia $\lambda^2 s_0$ es el doble de una señal de frecuencia $\lambda^2 s_0$. Por otro lado, las doce partes en la que se hizo la división del intervalo [440 Hz ,880 Hz] generan intervalos de forma que los cocientes entre sus extremos dan siempre lo mismo. Para obtener esto es necesario multiplicar 440 por un número λ tal que:

$$440\lambda^{12} = 880 = 2440 \quad (8)$$

Lo anterior es $\lambda = \sqrt[12]{2}$, que es aproximadamente 1,05946, y se obtienen las siguientes frecuencias (despreciando algunos decimales): 440 Hz, 466 Hz, 494 Hz, 523 Hz, 554 Hz, 586 Hz, 622 Hz, 660 Hz, 698 Hz, 740 Hz, 784 Hz, 831 Hz, 880 Hz.

Por lo anterior se define:

- La (A) = 440 Hz
- Si (B) = 494 Hz
- Do (C) = 523 Hz
- Re (D) = 586 Hz
- Mi (E) = 660 Hz
- Fa (F) = 698 Hz
- Sol(G) = 784 Hz

Las demás frecuencias son correspondientes a los semitonos (intervalo más corto de la música occidental; abarca medio tono [intervalo conformado por dos semitonos] (Latham, 2008), es decir:

- La# (A#) = 446 Hz
- Do# (C#) = 554 Hz
- Re# (D#) = 622 Hz
- Fa# (F#) = 740 Hz
- Sol# (G#) = 831 Hz

El símbolo sostenido (#) permite realizar una alteración de la altura en el ámbito musical, haciendo que la nota se incremente en un semitono.

En la siguiente imagen se muestran las notas presentes en las cuerdas de la guitarra:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C	C#	D	D#	E
B	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
G	G#	A	A#	B	C	C#	D	D#	E	F	F#	G
D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C	C#	D
A	A#	B	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A
E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C	C#	D	D#	E

Figura 4. Notas musicales

Fuente: <https://manualguitarraelectrica.com/>

Al comprender la diferencia entre la separación de las frecuencias, se hace referencia a los pares de notas La-Si, Do-Re, Re-Mi y Fa-Sol (En cifrado americano A-B, C-D, D-E, F-G), las cuales están separadas por un tono mientras que los pares de notas Si-Do (B-C), Mi-Fa (E-F) y La-La# (A-A#) son separadas por un semitono.

1.2.4. Ternas y escala pitagórica

Como se mencionó previamente, Pitágoras fue quien promovió el estudio de la creación de intervalos musicales. Por esta razón, es esencial definir conceptos que llevaron a tal creación, como la *terna pitagórica*, que se estableció como el trío de números enteros (a, b, c) tal que $a^2 + b^2 = c^2$. Tras este hallazgo, surgió lo que para los pitagóricos sería algo impresionante y de gran aplicabilidad, incluida la verdad en la teoría de que todas las cosas eran cuantificables numéricamente, y muchas de ellas podían expresarse numéricamente. De esta manera, descubrieron la expresión numérica de los intervalos musicales.

Por otro lado, los pitagóricos comprendieron que la altura del sonido dependía principalmente del número, en relación con la longitud de las cuerdas. De aquí proviene la posibilidad de representar numéricamente los intervalos de la escala (Merino, 2006).

1.2.5. Armónicos en la guitarra y serie armónica

Cuando una cuerda en vibración oscila en su totalidad a lo largo de su extensión produce la nota fundamental que determina el tono audible. Sin embargo, la cuerda también se divide naturalmente en secciones vibrantes, como la mitad, el tercio o el cuarto, que se comportan como cuerdas independientes.

Los armónicos en una cuerda se generan debido a diversas razones, como las propiedades del objeto vibrante, su material, la forma en que se induce la vibración, su amplificación, entre otros factores. Por lo tanto, es posible afirmar que cualquier fuente de sonido natural produce no solo la nota fundamental, sino también armónicos acompañantes. Desde un punto de vista acústico, los armónicos son frecuencias que constituyen múltiplos enteros de la frecuencia fundamental y se combinan para crear el sonido. Una onda de sonido compleja se puede percibir como una sola, ya que representa la superposición simultánea de la frecuencia fundamental y sus armónicos.

Un ejemplo concreto de esto se ilustra de la siguiente manera: si tocamos en la guitarra la nota Do₃, con una frecuencia de vibración aproximada de 130 Hz, esta frecuencia fundamental de 130 Hz es lo que se relaciona directamente con el sonido que escuchamos. Sin embargo, es importante distinguir la onda de sonido que realmente llega a nuestro oído, que está compuesta por los armónicos mencionados anteriormente. Al definir los armónicos como frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, podemos comprender que la onda de sonido que percibimos es la resultante de la superposición de los armónicos (Merino, 2006):

Tabla 1

Armónicos, fórmulas y frecuencias

ARMÓNICO	FÓRMULA	FRECUENCIA
Frecuencia fundamental	130 Hz x 1	130 Hz
Primer armónico	130 Hz x 2	260 Hz
Segundo armónico	130 Hz x 3	190 Hz
Tercer armónico	130 Hz x 4	520 Hz

Fuente: Elaboración propia.

Estos armónicos surgirán de manera progresiva, aumentando en frecuencia hasta que alguno de ellos alcance más de 20.000 Hz, que nuestro oído no podrá procesar. Esto confirma que la información sonora contenida en una sola nota musical es sumamente compleja. Cada nota musical tiene una frecuencia de vibración única, lo que significa que cualquier frecuencia de vibración puede ser asociada a una nota musical específica (Merino, 2006).

Adicionalmente, se establece una relación entre los armónicos y la serie armónica, que es un fenómeno físico-acústico que contribuye a la percepción del timbre en los instrumentos musicales. A través del siguiente pentagrama se presentará un ejemplo concreto y gráfico de los primeros veinte armónicos de la nota Do.



Figura 5. Notas musicales en las cuerdas de la guitarra

Fuente: www.manualguitarraelectrica.com

En él se muestran dos situaciones: la primera, los armónicos continúan apareciendo hasta que dejan de ser audibles (recordando que son aquellos mayores a 20.000 Hz). La segunda se basa en una disminución en la intensidad (volumen), lo que hace que solo logremos escuchar los dos o tres armónicos iniciales. Por otro lado, los armónicos subsiguientes son importantes, ya que influyen en el timbre (cualidad) del sonido. Sin embargo, el oído humano no los identifica de forma individual. Ahora, si solo podemos detectar la fundamental y los primeros dos o tres armónicos, entonces se establece que los intervalos representan los armónicos respecto a la fundamental. Si analizamos esto, entenderemos que la nota que escuchamos con mayor intensidad será la fundamental y la reconocemos

como la nota principal. El primer armónico forma un intervalo de octava. El segundo armónico representa un intervalo de quinta justa (en la octava superior). Finalmente, el tercer armónico vuelve a ser una repetición de la octava.

Basándonos en el siguiente pentagrama (Figura 6):

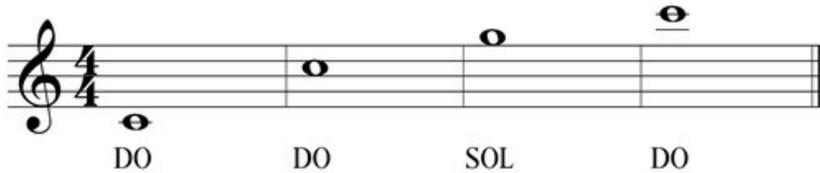


Figura 6. Armónicos reconocidos en Do
Fuente: elaboración propia.

Se establece que realmente escuchamos tres notas distintas que, al ordenarlas de forma decreciente de intensidad, cumplirán la siguiente estructura: Fundamental, Octava y Quinta Justa. Estas relaciones fueron definidas matemáticamente por Pitágoras.

Para facilitar la comprensión y claridad de los conceptos que se utilizan, a continuación se muestra la siguiente imagen (Figura 7) que tiene como objetivo visualizar los conceptos que se tratarán en el desarrollo del libro.

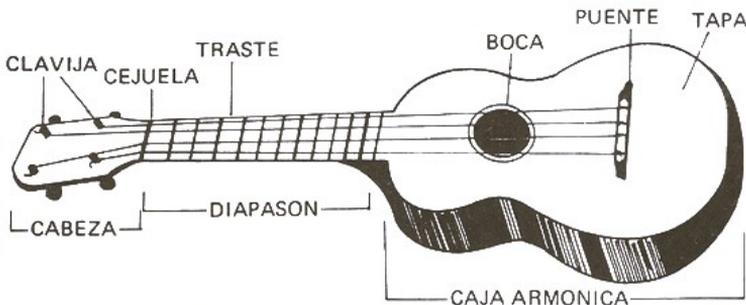


Figura 7. Partes de la guitarra
Fuente: <http://aprendeatocarguitarrafacilyrapido.blogspot.com.co/>

Por otro lado, los armónicos en las cuerdas de la guitarra se establecen de la siguiente manera:

- Frecuencia fundamental (cuerda al aire): es la predominante.
- 5º armónico (traste 3): la cuerda vibra en seis longitudes iguales, dando un armónico artificial dos octavas y una quinta por encima de la cuerda al aire.
- 4º armónico (traste 4): la cuerda vibra en cinco longitudes iguales, dando un armónico artificial dos octavas y una tercera mayor por encima de la cuerda al aire.
- 3º armónico (traste 5): la cuerda vibra en cuatro longitudes iguales, dando un armónico artificial dos octavas por encima de la cuerda al aire.
- 2º armónico (traste 7): la cuerda vibra en tres longitudes iguales, dando un armónico artificial una octava y una quinta por encima de la cuerda al aire.
- 4º armónico (traste 9): la cuerda vibra en cinco longitudes iguales, dando un armónico artificial dos octavas y una quinta por encima de la cuerda al aire.
- 1º armónico (traste 12): la cuerda vibra en dos longitudes iguales, dando un armónico artificial una octava por encima de la cuerda al aire.
- 4º armónico (traste 16): la cuerda vibra en cinco longitudes iguales, dando un armónico artificial dos octavas y una tercera mayor por encima de la cuerda al aire.
- 2º armónico (traste 19): la cuerda vibra en tres longitudes iguales, dando un armónico artificial una octava y una quinta por encima de la cuerda al aire.

El traste permite modificar la altura de las notas al presionar la cuerda (Latham, 2008).

1.3. VIBRACIÓN

Se define como vibración a la propagación de ondas elásticas, las cuales producen deformaciones y tensiones. También se considera como un movimiento repetitivo en posición de equilibrio; este se entiende como la fuerza que actúa sobre él, y es cero (Kreyszig, 2003).

1.3.1. Vibración simple y compuesta

Cuando el movimiento se repite periódicamente, hablamos de un movimiento armónico. Y si hacemos referencia a un movimiento más sencillo, definimos el movimiento armónico simple (MAS), que se puede expresar mediante la función matemática del seno.

$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

Otros movimientos periódicos más complejos pueden descomponerse en la suma de varios movimientos simples. Esto se logra a través de la serie de Fourier (Chamizo, 2012).

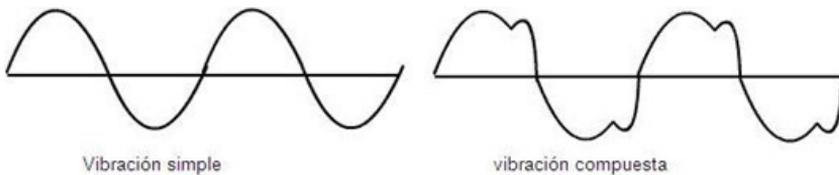


Figura 8. Vibración simple y compuesta

Fuente: <http://aprendeatocarguitarrafacilyrapido.blogspot.com.co/>

1.3.2. FENÓMENO ACÚSTICO: ESPECTRO Y ONDAS

El espectro de audio es la representación de la señal en el dominio de la frecuencia que permite apreciar las diferentes componentes del audio.

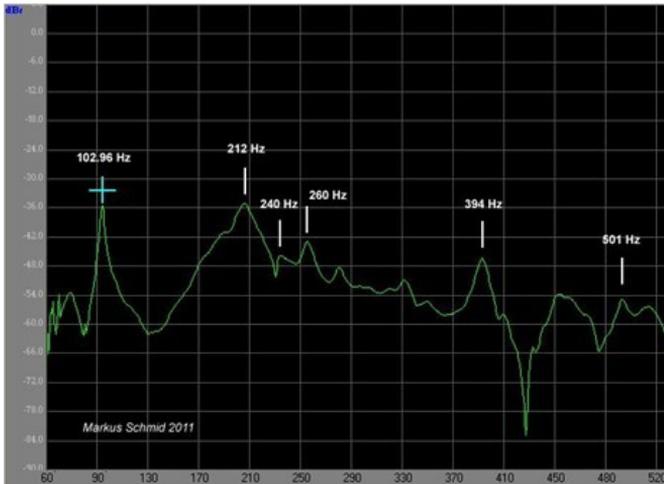


Figura 9. Notas musicales en las cuerdas de la guitarra
Fuente: <http://aprendeatocarguitarrafacilyrapido.blogspot.com.co/>

1.3.3. Ondas: velocidad, longitud y atenuación

La longitud de la onda (λ) es la distancia en metros que separa dos puntos en el mismo estado. Además, su valor se define mediante la relación entre la frecuencia y la velocidad de propagación (velocidad con la que se transmite la perturbación), de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{v}{f} \tag{9}$$

A mayor frecuencia, se reduce la longitud de la onda. Por ejemplo, la nota La₄ al aire, que corresponde al segundo espacio en la clave de sol, tiene una longitud de onda (λ) de 1 metro. En cuanto a la atenuación, se refiere a la disminución de energía a lo largo de la propagación de la onda (Shakarchi, 2003).

1.4. SERIE DE FOURIER Y LA ELIMINACIÓN DE ARMÓNICOS MUSICALES

Fourier demostró que una función continua se puede producir mediante la suma infinita de ondas senoidales y cosenoidales (Shakarchi, 2003). Por otro lado, tiene una gran influencia en la reproducción y síntesis del sonido. Una onda sinusoidal pura puede convertirse en sonido a través de un altavoz y se percibirá como un tono continuo puro. Los sonidos de instrumentos —como los de cuerda, específicamente la guitarra— constan de una onda fundamental (tono puro) y se complementan con armónicos que pueden considerarse como la superposición de ondas sinusoidales con una frecuencia fundamental (f) y múltiplos enteros de esa frecuencia.

1.4.1. Ecuación de la onda en la cuerda vibrante

La ecuación de la onda en la cuerda vibrante se utiliza con frecuencia en la matemática aplicada. En el estudio de la vibración de la cuerda, se parte de la suposición de que es elástica y de longitud “ l ”, tensándola con firmeza entre dos soportes en el mismo nivel horizontal, de tal manera que el eje “ x ” corresponde a lo largo de la cuerda.

Si tomamos como referencia la cuerda de la guitarra y se pone en movimiento (al pulsarla) de manera que se genere una vibración en un plano vertical, se puede denotar por $u(x, t)$ en el cual se obtiene un desplazamiento de la cuerda de la forma vertical respecto al punto x ; en un instante t .

Por otro lado, teniendo en cuenta factores como la resistencia del aire, y asimilando la amplitud del movimiento (no tan grande). Se considera que $u(x, t)$ satisface la ecuación diferencial parcial.

$$a^2 U_{xx} = Utt \text{ ecuación de la onda} \quad (10)$$

En el dominio $0 < x < l$, con $t > 0$.

En la ecuación de la onda el coeficiente a^2 está dado por:

$$a^2 = \frac{T}{\rho} \quad (11)$$

Donde T es la tensión (fuerza) en la cuerda y ρ es la masa por unidad de longitud. Además, las unidades a son longitud/tiempo; en otras palabras, la velocidad.

Para hacer una descripción más detallada de la cuerda, es necesario establecer de manera específica las condiciones iniciales y de frontera para el desplazamiento " $u(x, t)$ ". Para ello, se supone que los extremos de la cuerda se mantienen fijos, lo cual ocurre en cualquier cuerda de guitarra. Entonces, se tienen las siguientes condiciones de frontera:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (12)$$

Recordando que la ecuación diferencial es de segundo orden con respecto a t , se establecen dos posibles condiciones iniciales:

$$U(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (13)$$

Hace referencia a la posición inicial de la cuerda, y la segunda:

$$U_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad \text{velocidad inicial} \quad (14)$$

En donde f y g son funciones dadas.

Para que exista coherencia entre las ecuaciones se genera:

$$f(0) = f(l) = 0, \quad g(0) = g(l) = 0 \quad (15)$$

Cuerda con desplazamiento inicial diferente de cero

Inicialmente se supone que la cuerda se perturba desde su posición de equilibrio y luego se suelta, permitiendo que su velocidad sea 0 en el instante $t = 0$, para que así vibre libremente. Por lo tanto, se

obtendrá un desplazamiento vertical $u(x, t)$ que satisface la ecuación de onda.

$$a^2 U_{xx} = U_{tt}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (16)$$

Satisfaciendo las condiciones de frontera

$$U(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (17)$$

y las condiciones iniciales.

$$u(x, 0) = f(x), \quad U_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x; \quad (18)$$

Siendo f la función que describe el comportamiento de la cuerda en $t = 0$

Si se aplica el método de separación de variables se obtiene la solución de las ecuaciones anteriormente mencionadas.

Suponiendo que

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (19)$$

y sustituyendo u de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{x''}{x} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{t} = -\sigma \quad (20)$$

Donde σ es constante. Finalmente se establece que $x(T)$ y $T(t)$ satisfacen diferenciales.

$$X'' + \sigma X = 0 \quad (21)$$

$$T'' + a^2 \sigma T = 0 \quad (22)$$

Por otro lado, si se realiza la sustitución de $u(x, t)$ en la ecuación (10) con las condiciones de frontera (3), se obtiene...

$$x(0) = 0; x(l) = 0 \quad (23)$$

En las ecuaciones (21) y (22), se logran obtener soluciones no triviales si y solo si:

$$\sigma = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Y las soluciones de $X(x)$ son la proporcionalidad de $\sin(n\pi x/l)$. Por otro lado, si se utilizan en la ecuación (13) σ asignara valores correspondientes a la ecuación (15) además se establece que $T(t)$ es combinación lineal de $\sin(n\pi at/l)$ y $\cos(n\pi at/l)$.

Donde las ecuaciones que a continuación se mencionarán (16) y (17) satisfacen la ecuación de la onda (1) y las condiciones de frontera (3)

$$U_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi at}{l} \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

$$U_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} \quad n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Las ecuaciones (16) y (17) también corresponden a las soluciones fundamentales del problema.

Ahora, al superponer las soluciones (16) y (17), las cuales cumplen las condiciones iniciales (18).

Se obtiene que

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [c_n U_n(x, t) + k_n v_n(x, t) = n n(x, t)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi x}{l} \left(c_n \sin \frac{n\pi at}{l} + k_n \cos \frac{n\pi at}{l} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

donde c_n y k_n son constantes, que se eligen dependiendo de las condiciones iniciales.

Bajo la condición inicial $u(x, t) = f(x)$ se establece que:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x) \quad (28)$$

Adicionalmente los k_n deben ser los coeficientes en la serie de senos de Fourier de periodo $2l$ para f y se expresan por:

$$k_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Se supone además que la serie (14) permite derivar cada término respecto a t . Por tanto, si se parte de la condición inicial $u_t(x, t) = 0$ se obtiene:

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \quad (30)$$

donde $c_n (n\pi a/l)$ son coeficientes de la serie de Fourier en términos de senos con periodo $2l$, para la función cero.

Para concluir c_n debe ser 0 para todo n . (Por fórmula de Fourier). Finalmente, la solución de (1), (3) y (9) es

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x a t}{l} = 0 \quad (31)$$

donde cada coeficiente de k_n se da por la ecuación anteriormente mencionada.

Si el análisis que queremos parte de un valor fijo n la expresión $\sin(n\pi x/l) \cos(n\pi a t/l)$ de la ecuación (2.22) es periódico en el tiempo con el periodo $2l/na$, el cual representa un movimiento

vibratorio de la cuerda que tenga este periodo o cumpla con tener una frecuencia $n\pi a/l$.

Por otro lado, se definen como frecuencias naturales de la cuerda a aquellas cantidades que cumplan con $(\lambda a = n\pi a/l)$ para $n = 1, 2, \dots$ (frecuencias que la cuerda establece cuando vibra libremente).

Con el factor $\sin(n\pi x/l)$ se representa el patrón de desplazamiento de la cuerda, que depende de la frecuencia dada. Cada patrón de desplazamiento se denomina modo natural, que es periódico respecto a la variable x .

Adicionalmente, la longitud de onda hace referencia al periodo espacial $2l/n$ con modo de frecuencia $n\pi a/l$. En conclusión, el movimiento total de la cuerda se da por $u(x, t)$, que es una combinación de los modos naturales de vibración y a su vez es función periódica del tiempo con periodo $2l/a$.

Síntesis de la solución de la cuerda elástica

Si la cuerda se pone en movimiento desde una posición inicial que está especificada con una velocidad establecida, entonces el desplazamiento vertical $u(x, t)$ está dado por:

$$a^2 U_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (32)$$

La expresión anterior (32) corresponde a la ecuación de onda. Por consiguiente, estableciendo condiciones de frontera se tiene que:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (33)$$

y finalmente, las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq l \quad (34)$$

donde f y g son funciones que definen posición y velocidad inicial de la cuerda, respectivamente.

Recordando que cada solución fundamental obtenida (2.16) y (2.17) satisfacen:

- Ecuación diferencial (2.1)
- Condiciones de frontera (2.3)
- Ecuación (2.18) que corresponde a $u(x, t)$.

Se determina que cada coeficiente c_n y k_n son establecidas por condiciones iniciales (2.26).

Aplicando la condición $u(x, 0) = f(x)$

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x) \quad (35)$$

Con k_n coeficientes de la serie de senos de Fourier para f , de periodo $2l$. Por lo que:

$$K_n = \frac{2}{l} \int_0^1 f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (36)$$

derivando los términos de la ecuación (18) respecto (t) y aplicando la segunda condición inicial.

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad (37)$$

Se tiene:

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} c_n \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x) \quad (38)$$

donde $(n\pi a/l)c_n$ coeficientes de la serie de Fourier para g de periodo $2l$:

$$\frac{n\pi x}{l} C_n = \frac{2}{l} \int_0^1 g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (39)$$

Obteniendo así la solución formal para el análisis de la vibración en las cuerdas elásticas, específicamente en las cuerdas de la guitarra.

1.4.2. Transformada rápida de Fourier

El método directo de la interpolación de cantidades grandes con datos uniformemente espaciados por medio de polinomios trigonométricos puede dar resultados exactos. Sin embargo, este no fue de gran aplicación en años anteriores ya que requería de muchos cálculos aritméticos en la determinación de las constantes de aproximación.

Al ver las dificultades a la hora de realizar estudios en los que se contaban con miles de datos, surgió en 1995 el trabajo de J.W Cooley y J.W Tukey que describía otro método para calcular las constantes en el polinomio trigonométrico interpolante. Este método requiere de $O(m \log_2 m)$ multiplicaciones y $O(m \log_2 m)$ sumas, sabiendo elegir de forma correcta m .

Esto permitía que el problema que se tenía inicialmente con el método directo se redujera de gran manera con el trabajo de Cooley y Tukey. Este método se reconoce con el nombre de algoritmo de Cooley-Tukey o algoritmo de la transformada rápida de Fourier (TRF), lo que generó una revolución en la utilización de los polinomios trigonométricos interpolantes.

La TRF calcula los coeficientes complejos c_k en

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} c_k e^{tkx} \quad (40)$$

Donde

$$c_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{\frac{tk\pi j}{m}}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, 2m - 1 \quad (41)$$

omitiendo así el reemplazo de a_k y b_k . Luego de obtener las constantes c_k , los valores de a_k y b_k se recuperan mediante la fórmula de Euler en:

$$e^{tz} = \cos z + i \sin z, \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, m \quad (42)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} C_k (-i)^k &= \frac{1}{m} C_k e^{-1\pi x} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{\frac{tk\pi j}{m}} e^{-1\pi x} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{tk \left(-\pi + \frac{\pi j}{m} \right)} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \left(\cos \left(-\pi + \frac{\pi j}{m} \right) + i \sin \left(-\pi + \frac{\pi j}{m} \right) \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j (\cos kx_j + i \sin kx_j) \end{aligned} \quad (43)$$

Luego,

$$a_k + ib_k = \frac{(-1)^k}{n} c_k \quad (44)$$

para simplificar, se agrega b_0 y b_m al conjunto, siendo 0 ante la simplificación final, logrando así que lo anterior no altere el resultado obtenido.

La reducción de términos se logra gracias al cálculo de la TFR mediante los coeficientes c_k y la utilización de todo entero n .

Por otro lado, si se supone $m = 2p$ para algún entero positivo p . Con $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Se tiene que:

$$ck + cm + k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{\frac{tk\pi j}{m}} + \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{\frac{t(m+k)\pi j}{m}} \quad (45)$$

$$\sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{tk\pi j/m} (1 + e^{t\pi j}) \quad (46)$$

Pero se establecen las siguientes condiciones:

$$1 + e^{t\pi j} = \begin{cases} 2, & \text{si } j \text{ es par} \\ 0, & \text{si } j \text{ es impar} \end{cases} \quad (47)$$

Ahora, si los términos m no son cero, se deben sumar, y si J se reemplaza por $2j$ en la suma, se puede obtener

$$ck + cm + k = 2 \sum_{j=0}^{2-1} y_2 e^{tk\pi j(2j)m} \quad (48)$$

es decir

$$ck + cm + k = 8 \sum_{j=0}^{2-1} y_2 e^{tk\pi j(\frac{m}{2})} \quad (49)$$

Análogamente:

$$ck - cm + k = 2e^{\frac{tk\pi}{m}} \sum_{j=0}^{m-1} y_2 e^j + 1e^{tk\pi j(\frac{m}{2})} \quad (50)$$

ya que es posible recuperar los coeficientes de ck y $cm+k$ mediante la fórmula de Euler (33).

Cuando se analizan las ecuaciones (42) y (43), se identifica la similitud en estructura en la ecuación (32), teniendo como diferencia la modificación de índice, ya que inicialmente se tenía m y posteriormente se reemplaza por $m/2$. Lo anterior, con el fin de simplificar o disminuir la cantidad de multiplicaciones complejas. Recordando que los coeficientes $2m$ establecen la cantidad de multiplicaciones complejas por coeficiente, lo que totaliza $(2m)^2$. Por otro lado, en las ecuaciones (42) y (43) se logra aplicar el método de reducción de sumas ya que conservan la misma forma que la original, además cuentan con m que se establecen como potencia de 2.

Si se reemplaza por $j=0$ y $j=(m/2)-1$ el $2m^2$ cambia por:

$$2 \left[\frac{m}{2} \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} + 1 \right) \right] = m^2 + m \quad (51)$$

Por lo que $(m^2 + m) + m = m^2 + 2m$ se establece como la cantidad total de multiplicaciones complejas. Si repetimos el mismo método se obtiene 4 sumas, como $m/4$ términos y el m^2 toma la estructura de:

$$4 \left[\left(\frac{m}{4} \right)^2 + \frac{m}{4} \left(\frac{m}{4} + 1 \right) \right] = m^2 + m \quad (52)$$

Lo que arroja $m^2/2 + 3$ multiplicaciones complejas totales.

Ahora generalizando el método a s veces, el total de multiplicaciones complejas se reduce a $m^2/s^{s-2} + ms$. El proceso se concluye cuando $s = p+1$ tomando $m = 2^p$ y $2m = 2^{p+1}$, luego de $s = p + 1$ reducciones, el número de multiplicaciones se simplifica a:

$$3m + m \log_2 m = O(m \log_2 m)$$

Ejemplo: Si se supone que se tiene $m = 2^{12} = 4096$. Directamente, se tendría que: $(2m)^2 = (8192)^2 = 67108864$

Aplicando Fourier:

$$3(4096) + (4096) \log_2(4096) = 61440$$

Concluyendo así que la transformada de Fourier a grandes rasgos simplifica el trabajo a la hora del análisis en nuestro caso del sonido.

Método de la transformada rápida de Fourier

El método que se desarrolla a continuación es el que permite obtener cada uno de los coeficientes de la suma para diversos datos. Este es el que ha permitido encontrar, de manera general, cada una de las frecuencias del sonido de las cuerdas de la guitarra.

Método de la transformada rápida de Fourier de Burden y Faires, J. Para calcular los coeficientes de la suma:

$$\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} c_k e^{tk\pi} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} ck \cos kx + i \sin kx, \text{ donde } i = \sqrt{-1} \quad (53)$$

para los datos $(x_j, y_j)_{j=0}^{2m-1}$ donde $m = 2^p$ y $k_j = -\pi + j\pi/m$ para $j = 0, 1, \dots, 2m - 1$:

ENTRADA $m, p; y_0, y_1, \dots, y_{2m-1}$.

SALIDA números complejos c_0, \dots, c_{2m-1} ; números reales $a_0, \dots, a_m; b_1, \dots, b_{m-1}$.

Paso 1: Tome $M = m; q = p; \zeta = e^{\pi i/m}$.

Paso 2: Para $j = 0, 1, \dots, 2m - 1$ tome $c_j = y_j$.

Paso 3: Para $j = 1, 2, \dots, M$ tome $\xi_j = \zeta^j; \xi_j + M = -\zeta^j$.

Paso 4: Tome $K = 0; \xi_0 = 1$.

Paso 5: Para $L = 1, 2, \dots, p + 1$ hacer los pasos 6–12.

Paso 6: Mientras $K < 2m - 1$ hacer los pasos 7–11.

Paso 7: Para $j = 1, 2, \dots, M$ hacer los pasos 8–10.

Paso 8: Para $K = k_p \cdot 2^p + k_{p-1} \Delta 2^{p-1} + \dots + k_1 \cdot 2 + k_0$; (Decomponga k .)

Para $K_1 = K/2^q = k_p \cdot 2^{p-q} + \dots + k_{q+1} \cdot 2 + k_q$;

$K_2 = k_q \cdot 2^p + k_{q+1} \cdot 2^{p-1} + \dots + k_p \cdot 2^q$.

Paso 9: Para $\eta = c_k + M\xi K_2$; $c_K + M = c_k - \eta$;

$$c_K = c_k + \eta.$$

Paso 10: Para $K = K + 1$.

Paso 11: Para $K = K + M$.

Paso 12: Para $K = 0$; $M = M/2$; $q = q - 1$.

Paso 13: Mientras $K < 2m - 1$ hacer los pasos 14–16.

Paso 14: Para $K = k_p \cdot 2^p + k_{p-1} \cdot 2^{p-1} + \dots + k_1 \cdot 2 + k_0$;
(Decompose k .) Para $j =$

$$k_0 \cdot 2^p + k_1 \cdot 2^{p-1} + \dots + k_{p-1} \cdot 2 + k_p.$$

Paso 15: si $j > K$ entonces intercambiar c_j y c_k . Paso 16: Para $K = K + 1$.

Paso 17: Tome $a_0 = c_0/m$; $a_m = \text{Re}(e^{-i\pi m} c_m/m)$.

Paso 18: Para $j = 1, \dots, m - 1$ para $a_j = \text{Re}(e^{-i\pi j} c_j/m)$;
 $b_j = \text{Im}(e^{-i\pi j} c_j/m)$

Paso 19: SALIDA (C_0, \dots, C_{2-1} ; a_0, \dots, a_m ; b_1, \dots, b_{m-1});
PARAR.

Visualmente es obvio que, al hacer tal análisis, el registro de datos, a pesar de que serán disminuidos por la transformada rápida de Fourier, establece un proceso engorroso y que al no ser manejado correctamente arrojará errores. Por tal razón, se generó el análisis de

tales datos mediante el software matemático MATLAB. En el capítulo 2 se encuentra el proceso aplicado a tal método, y en el capítulo 4 (anexos) del presente documento se encuentran los códigos que permitieron desarrollar el análisis de forma exacta y simplificada.

1.4.3. Generalidades: funciones periódicas. Series trigonométricas

Fourier introdujo la idea de que las funciones periódicas pueden ser analizadas mediante el uso de series trigonométricas. Se llama serie trigonométrica a una serie de la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

En que los coeficientes a_n y b_n , son reales y x es una variable real

Coefficientes de Fourier

Las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$ son periódicas con periodo 2π y satisfacen:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta \quad (54)$$

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta \quad (55)$$

Hay otras funciones $f(\theta)$ que son periódicas en 2π , es decir que satisfacen la ecuación:

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta) \quad (56)$$

solo se tiene que especificar que la función f en el intervalo cerrado-abierto $[0, 2\pi]$ en todo el intervalo y la ecuación anterior determina el valor a todos los valores de θ .

Otros ejemplos de funciones periódicas con periodo 2π son las funciones constantes y las funciones $\cos(n\theta)$ y $\sin(n\theta)$ para cualquier entero positivo n (Terras, 1989). Para los valores negativos de n se tiene que:

$$\cos(-n\theta) = \cos(n\theta) \quad (57)$$

$$\text{sen}(-n\theta) = -\text{sen}(n\theta) \quad (58)$$

Con lo anterior, se obtiene la ecuación general de la serie trigonométrica que ha sido mencionada anteriormente (1).

Los instrumentos musicales suenan diferentes incluso cuando se toca la misma nota. Un ejemplo de ello se fundamenta en la diferencia que se encuentra en el sonido del piano (cuerda percutida) y la guitarra (cuerda pulsada); esto está ligado a la serie de Fourier. Si se tiene una nota como la de Do (C) que tiene una frecuencia de 261.6 Hz en la escala estándar, la frecuencia angular es 2π o 1643.8 radianes/seg. llamándolo ω_0 , cuando se establecen acercamientos de este tipo se podrá concluir que esta nota en cualquier instrumento musical se fundamenta básicamente en la combinación de muchas frecuencias y muchos múltiplos de ella. Una frecuencia pura es establecida por ω_0 , pero un sonido musical está compuesto por muchos armónicos $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0$, etc.

En lugar de $e^{j\omega_0 t}$ un instrumento produce:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \quad (59)$$

Para desarrollar el proceso de descomposición de un sonido en sus ondas senos y cosenos, se establece el análisis de Fourier. La onda de sonido se caracteriza en términos de las amplitudes de las ondas sinusoidales que la conforman. El conjunto de números indica la cantidad de armónicos de un sonido, lo cual se puede considerar como el espectro armónico de dicho sonido. Además, es importante tener en cuenta que, dependiendo del contenido de armónicos, se puede establecer la cualidad o timbre de una nota musical sostenida.

1.4.4. Transformada de Fourier

Las series de Fourier se utilizan y fundamentan solo en señales periódicas, pero para otros casos generales, como el de señales continuas,

se desarrolló la transformada de Fourier, siendo este uno de los más importantes en el procesamiento de señales (Walker, 1996)

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (60)$$

En la transformada de Fourier, para cada valor de frecuencia se integra la función $x(t)$ multiplicada por una exponencial compleja, que no es más que la expresión de un seno y un coseno según los coeficientes de Fourier.

Ejemplo de la aplicación de la transformada de Fourier

A continuación, se muestra un ejemplo generalizado del proceso de la transformada de Fourier, donde se toma una señal $X(n)$ y se pretende calcular su transformada mediante un N , que corresponde a la cantidad de datos.

Proceso de la señal

Se parte de la fórmula general de la transformada:

$$XT[k] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n]e^{\frac{-j2\pi nk}{N}} \quad (61)$$

Para obtener el valor de $k=0$ el cual corresponde al primer coeficiente se reemplaza a k en la ecuación general de la siguiente manera:

$$XT[0] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n]e^{\frac{-j2\pi n(0)}{N}} \quad (62)$$

Obteniendo finalmente la siguiente expresión:

$$XT[0] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \quad (63)$$

Ahora se procede a cambiar la estructura del e mediante el uso de la identidad de Euler así:

$$\cos \frac{2\pi n(k)}{N} - J \operatorname{sen} \frac{2\pi n(k)}{N} \quad (64)$$

Evalutando nuevamente en 0, se obtendrá una parte imaginaria $\operatorname{sen}(0)=0$ y real $\cos(0)=1$ con lo anterior la expresión $J \operatorname{sen} \frac{2\pi n(k)}{N}$ se anula y solo quedaría la parte real, entonces:

$$XT[0] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \quad (65)$$

corresponderá a los términos $x[0]+x[1]+\dots+x[x-1]$ los cuales son los instantes de la señal.

Por otro lado, para $k=1$ se tiene que

$$XT[1] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \cos \frac{2\pi n(k)}{N} - J \operatorname{sen} \frac{2\pi n(k)}{N} \quad (66)$$

Para terminar, se logra la siguiente expresión global:

$$\begin{aligned} x[0] + x[1] \cos \frac{2\pi n(k)}{N} - Jx[1] \operatorname{sen} \frac{2\pi n(1)}{N} + x[2] \cos \frac{4\pi n(k)}{N} - Jx[2] \operatorname{sen} \frac{4\pi n}{N} \\ + \dots x[N-1] \underbrace{\cos \frac{2\pi n(n-1)}{N}}_{\text{parte real}} - Jx[N-1] \underbrace{\operatorname{sen} \frac{2\pi n(n-1)}{N}}_{\text{parte imaginaria}} \end{aligned} \quad (67)$$

Se agrupan los términos de j y se suman, determinando:

$$\underbrace{\sigma^2}_{\text{parte real}} + \underbrace{\omega^2}_{\text{parte compleja}} \quad (68)$$

Luego:

$$|X[n]| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \quad (69)$$

Para concluir, se determina que el valor absoluto de la señal respecto a una frecuencia donde se encuentran coeficientes permite identificar los componentes de frecuencia que integran una señal que se analiza; sintetizando el proceso anteriormente aplicado, se toma inicialmente la señal original, se convierte en su transformada de Fourier y se realiza un proceso inverso para obtener la señal construida en función del tiempo (Walker, 1996). A continuación, se presenta un ejemplo particular con una muestra de ocho valores para la función $\sin(x)$. Se evalúa la función de forma simétrica tomando valores como:

- $\sin(0) = 0$
- $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,707$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0,707$
- $\sin(\pi) = 0$
- $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -0,707$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
- $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -0,707$

Para encontrar los ocho valores, se reemplaza cada uno de ellos en la fórmula de la transformada discreta mencionada anteriormente.

Para X_0 el **valor discreto** está dado por:

$$\begin{aligned} x_0 = & 0e^{\frac{-j_2\pi(0)(0)}{8}} + (0.707)e^{\frac{-j_2\pi(0)(1)}{8}} + 1e^{\frac{-j_2\pi(0)(2)}{8}} + \\ & (0.707)e^{\frac{-j_2\pi(0)(3)}{8}} + 0e^{\frac{-j_2\pi(0)(4)}{8}} + (-0.707)e^{\frac{-j_2\pi(0)(5)}{8}} + \\ & (-1)e^{\frac{-j_2\pi(0)(6)}{8}} + (-0.707)e^{\frac{-j_2\pi(0)(7)}{8}} \end{aligned}$$

Ahora aplicando la **fórmula de Euler** se tiene que:

$$\begin{aligned} x_0 = & 0 + 0.707[\cos(0) + j\text{sen}(0)] + 1[\cos(0) + \\ & j\text{sen}(0)] + 0.707[\cos(0) + j\text{sen}(0)] + \\ & 0[\cos(0) + j\text{sen}(0)] - 0.707[\cos(0) + j\text{sen}(0)] \\ & - 1[\cos(0) + j\text{sen}(0)] \\ & - 0.707[\cos(0) + j\text{sen}(0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 = & 0 + 0.707[1 + j(0)] + 1[1 + j(0)] + 0.707[1 + \\ & j(0)] + 0[1 + j(0)] - 0.707[1 + j(0)] - 1[1 + j(0)] - \\ & 0.707[1 + j(0)] \end{aligned}$$

$$x_0 = 0 + 0.707 + 1 + 0.707 - 0.707 - 1 - 0.707 = 0$$

Si la función $\text{sen}(x)$ es evaluada en los puntos X_4, X_5, X_6 toma los mismos valores de X_0, X_1, X_2 , pero con signo negativo, lo cual hace que al sumarlos se anulen obteniendo como resultado final 0 (Walker, 1996).

Valor discreto para X1:

$$\begin{aligned}
 x_0 = & 0e^{\frac{-j_2\pi(0)(0)}{8}} + (0.707)e^{\frac{-j_2\pi(1)(1)}{8}} + 1e^{\frac{-j_2\pi(1)(2)}{8}} + \\
 & (0.707)e^{\frac{-j_2\pi(1)(3)}{8}} + 0e^{\frac{-j_2\pi(1)(5)}{8}} + (-0.707)e^{\frac{-j_2\pi(1)(1)}{8}} + \\
 & (-1)e^{\frac{-j_2\pi(01)(6)}{8}} + (-0.707)e^{\frac{-j_2\pi(1)(7)}{8}}
 \end{aligned}$$

Fórmula de Euler

$$\begin{aligned}
 x_0 = & 0 + 0.707 \left[\cos\left(-\frac{1\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(-\frac{1\pi}{4}\right) \right] \\
 & + 1 \left[\cos\left(\frac{-1\pi}{2}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-1\pi}{2}\right) \right] \\
 & + 0.707 \left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right) \right] \\
 & + 0[\cos(-\pi) + j\text{sen}(-\pi)] \\
 & - 0.707 \left[\cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-5\pi}{4}\right) \right] \\
 & + (-1) \left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right) \right] \\
 & - 0.707 \left[\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-7\pi}{4}\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 = & 0 + 0.707 \left[\cos\left(-\frac{1\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(-\frac{1\pi}{4}\right) \right] \\
 & + 1 \left[\cos\left(\frac{-1\pi}{2}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-1\pi}{2}\right) \right] \\
 & + 0.707 \left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right) \right] \\
 & + 0[\cos(-\pi) + j\text{sen}(-\pi)] \\
 & - 0.707 \left[\cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-5\pi}{4}\right) \right] \\
 & + (-1) \left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right) \right] \\
 & - 0.707 \left[\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-7\pi}{4}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Valor discreto para X_2

$$\begin{aligned}
x_2 = & 0e \frac{-j_2\pi(2)(0)}{8} + (0.707)e \frac{-j_2\pi(2)(1)}{8} + \\
& 1e \frac{-j_2\pi(2)(2)}{8} + (0.707)e \frac{-j_2\pi(2)(3)}{8} + 0e \frac{-j_2\pi(2)(4)}{8} + \\
& (-0.707) \frac{-j_2\pi(2)(5)}{8} + (-1) \frac{-j_2\pi(2)(6)}{8} + \\
& (-0.707)e \frac{-j_2\pi(2)(7)}{8}
\end{aligned} \tag{70}$$

Fórmula de Euler

$$\begin{aligned}
x_2 = & 0 + 0.707 \left[\cos\left(-\frac{1\pi}{2}\right) + j\text{sen}\left(-\frac{1\pi}{2}\right) \right] \\
& + 1[\cos(-\pi) + j\text{sen}(-\pi)] \\
& + 0.707 \left[\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{2}\right) \right] \dots \\
& - 0.707 \left[\cos\left(\frac{-7\pi}{2}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-7\pi}{2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
x_2 = & 0 + (0 - 0.707j) + (-1 + 0j) + (0.707j) \dots (0 \\
& - 0.707j) \\
x_2 = & 0
\end{aligned}$$

Valor discreto para X_3

$$\begin{aligned}
x_3 = & 0e \frac{-j_2\pi(3)(0)}{8} + (0.707)e \frac{-j_2\pi(3)(1)}{8} + \\
& 1e \frac{-j_2\pi(3)(2)}{8} + (0.707)e \frac{-j_2\pi(3)(3)}{8} + 0e \frac{-j_2\pi(3)(4)}{8} + \\
& (-0.707) \frac{-j_2\pi(3)(5)}{8} + (-1) \frac{-j_2\pi(3)(6)}{8} + \\
& (-0.707)e \frac{-j_2\pi(3)(7)}{8}
\end{aligned} \tag{72}$$

Fórmula de Euler

$$\begin{aligned}
 x_3 &= 0 + 0.707 \left[\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) \right] \dots \\
 &\quad - 0.707 \left[\cos\left(\frac{-21\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-21\pi}{4}\right) \right] \\
 x_2 &= 0 + (-0.05 - 0.5j) + (0 + j) + (0.5 - 0.5j) + \dots + (0.5 \\
 &\quad - 0.5j) \\
 x_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{73}$$

El proceso es repetitivo hasta obtener los ocho valores de las muestras el último se establece por:

Valor discreto para X_7 :

$$\begin{aligned}
 x_7 &= 0e^{\frac{-j_2\pi(7)(0)}{8}} + (0.707)e^{\frac{-j_2\pi(7)(1)}{8}} + \\
 &1e^{\frac{-j_2\pi(7)(2)}{8}} + (0.707)e^{\frac{-j_2\pi(7)(3)}{8}} + 0e^{\frac{-j_2\pi(7)(4)}{8}} + \\
 &(-0.707)e^{\frac{-j_2\pi(7)(5)}{8}} + (-1)e^{\frac{-j_2\pi(7)(6)}{8}} + \\
 &(-0.707)e^{\frac{-j_2\pi(7)(7)}{8}}
 \end{aligned} \tag{74}$$

Fórmula de Euler

$$\begin{aligned}
 x_7 &= 0 + 0.707 \left[\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) \right] \dots \\
 &\quad - 0.707 \left[\cos\left(\frac{-49\pi}{4}\right) + j\text{sen}\left(\frac{-49\pi}{4}\right) \right] \\
 x_7 &= 0 + (-0.05 - 0.5j) + (0 + j) + (0.5 - 0.5j) + \dots \\
 &\quad + (0.5 - 0.5j) \\
 x_7 &= 4j \tag{75}
 \end{aligned}$$

El proceso anterior permite la obtención de cada uno de los valores de la transformada según la señal que se pretende analizar y la cantidad de datos que se requieran para el mismo. El desarrollo manual de la transformada cada vez se hace más extenso, motivo por el cual se busca la facilitación del análisis por medio de simuladores o programaciones en Excel u otros softwares (Walker, 1996).

Transformada inversa

Permite obtener la señal original en el tiempo y está dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{j\omega t} d(\omega) \tag{76}$$

1.4.5. Serie de Fourier de funciones pares e impares

La serie de Fourier de una función par, cuyo periodo es $2L$, es una *serie de Fourier de cosenos*.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \tag{77}$$

Con coeficientes

$$(a_0) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad (a_n) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (78)$$

La serie de Fourier de una función impar cuyo periodo es $2L$ es una *serie de Fourier de Senos*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \quad (79)$$

Con coeficientes

$$(b_0) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx, \quad (80)$$

En caso de que el periodo sea 2π , se tiene lo siguiente:

Para función par

$$f(x) = a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (81)$$

Con coeficientes

$$(a_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad (a_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (82)$$

Y para una función impar:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \quad (83)$$

Con coeficientes

$$(b_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (84)$$

1.4.6. Integrales de Fourier de cosenos y senos

Para facilitar el proceso y evitar errores en el procedimiento de funciones pares o impares, se establecieron integrales que simplificaron las series de Fourier de la siguiente manera: si $f(x)$ es una función par, entonces $B(\omega) = 0$ y

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) v dv, \quad (85)$$

Y la integral de Fourier se reduce a la integral de Fourier de coseno

$$A(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega, \quad (86)$$

De manera similar se actúa sobre $f(x)$ siendo impar, entonces se tiene $A(\omega) = 0$ y

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \operatorname{sen} \omega v dv \quad (87)$$

Reduciendo se obtiene la integral de Fourier de seno

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega) \operatorname{sen} \omega x d\omega, \quad (88)$$

1.4.7. Serie de Fourier y análisis armónico

El punto de partida del análisis armónico fue el desarrollo de la serie de Fourier, la cual afirma que cualquier función 1-periódica razonable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se puede analizar como:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \quad (89)$$

Con

$$a_n = \int_0^1 f(x)(-nx)dx \quad (90)$$

Donde se ha empleado la notación sintética $e^{(2\pi ix)}$ para englobar los senos y cosenos que generan la representación de tonos puros. A cada uno de los a_n se les llama coeficientes de Fourier.

Las funciones

$$\{e(nx)\}_{n=-\infty}^{\infty} \quad (91)$$

son los armónicos en descomposición (Katznelson, 1976).

Por la periodicidad, el intervalo de integración $[0,1]$ se puede sustituir por cualquier otro de longitud 1.

La solución de cuerdas vibrantes está dada por:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \left(K_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + M_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right) \quad (92)$$

Donde

$$K_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (93)$$

$$M_n = \frac{2}{L} \int_0^L v(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (94)$$

De este resultado podemos demostrar la existencia de vibraciones armónicas que acompañan a la vibración fundamental (Shakarchi, 2003).

Por otro lado, se define que la frecuencia f y el período T de un movimiento vibratorio sobre una cuerda no dependen de su posición inicial ni de la velocidad inicial, y vienen dados por:

$$f = \frac{2}{T} = \frac{2}{2L} = \sqrt{\frac{T}{d\pi r^2}} \quad (95)$$

Donde L es la longitud de la cuerda, d es su densidad y r es su radio. Además, se expresa como suma de movimientos vibratorios cuyos períodos son: T , $T/2$, $T/3$, etc., y frecuencias $2f$, $3f$, $4f$, etc. (Walker, 1996).

Cada sumando $y_n(x, y)$, $n \in \mathbb{N}$, se puede expresar también en los siguientes términos:

$$Y_{nx}(t) = N_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L} + \phi_n\right) \quad (96)$$

Donde $K_n = N_n \operatorname{sen}\phi_n$, $M_n = N_n \operatorname{cos}\phi_n$ lo que representa un movimiento vibratorio de frecuencias $f_n = nf$. Por tanto, son funciones con período $\frac{2L}{nc} = \frac{T}{n}$

Los sonidos producidos por los movimientos vibratorios y_n , $n \in \mathbb{N}$, de una cuerda sonora se denominan armónicos. El correspondiente para $n=1$, que es el más grave de todos, se denomina fundamental. Los movimientos $y(x,t)$ en un movimiento vibratorio cualquiera $y(x,t)$ de una cuerda sonora determinan lo que se conoce como ondas estacionarias. Esto permite que la cuerda aparezca dividida en cierto número de segmentos separados por puntos, que son llamados nodos, como fue establecido por J. Sauveur de manera experimental. En cada uno de los segmentos — que se denomina vientre—, la amplitud es la variable, aunque se mantiene en posición, es decir, que no se desplaza (Shakarchi, 2003).

Los nodos del armónico que originan $Y_n(x,y)$ se obtiene en todos aquellos $x \in N [0,L]$, tal que $Y_{nx}(t)=0$, para todo t , en x que satisfacen:

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \quad (97)$$

Por tanto, existe exactamente n -a nodos para el n -ésimo armónico y éstos se consiguen en:

$$x = \left(\frac{kL}{n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (98)$$

Marin Mersenne (La Soulletière, 1588 – París, 1648), teólogo franciscano y científico francés, publicó en 1636 su obra *Harmonie Universelle (La théorie et la pratique de la musique)*, y allí exponía cuáles eran las leyes que regían la frecuencia de los sonidos producidos por una cuerda en vibración. El enunciado de estas lo recogemos a continuación como una consecuencia directa del teorema anterior.

Leyes de Mersenne

La frecuencia del sonido producido por una cuerda cumple los siguientes enunciados (Shakarchi, 2003):

- Es inversamente proporcional a la longitud de la misma.
- Es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión a la que está sometida.
- Es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su densidad.
- Es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la sección de esta, es decir, de su diámetro.

Timbre

Depende del grado de complejidad del movimiento vibratorio que origina dicho sonido. Esta cualidad —a diferencia de la altura y la intensidad— no es mensurable; por lo tanto, no existe una unidad que permita comparar timbres de distintos sonidos (Arthur, 2000).

Un instrumento musical se dice que verifica la Ley de Fourier si el movimiento vibratorio que da como resultado un sonido de frecuencia f se puede expresar como composición de movimientos armónicos simples de frecuencias $f, 2f, 3f$, etc.

1.4.8. Propagación del sonido

Es importante mencionar que la velocidad del sonido alcanza aproximadamente 1.200 km por hora (Arthur, 2000). En apartados anteriores se han establecido definiciones básicas para el desarrollo del análisis. En este contexto, se establecerá la ecuación de ondas estacionarias. La función u que determina el desplazamiento de las partículas en movimiento ondulatorio se expresa en términos de la posición $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y el tiempo $t > 0$. Entonces $u(x,y,z;t)$ representa el desplazamiento de una onda, *la ecuación de onda*, es la ecuación diferencial en derivadas parciales lineal y homogénea.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = c^2 \Delta u \quad (99)$$

Donde c es la velocidad (constante) de propagación del medio y Δu es el Laplaciano de u esto es

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (100)$$

Con este capítulo se ha logrado establecer conceptos y fórmulas básicas que han sido importantes y necesarias para la aplicación de Fourier en el análisis. Se propuso generar una síntesis de todo aquello que ha influido en la realización de la investigación. El siguiente capítulo se estructura para realizar su aplicación mediante el software matemático y de acústica musical. De esta manera, se clarificarán cada uno de los aspectos que forman parte de la realización de este trabajo investigativo.

APLICACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER PARA OBTENER UN TONO PURO

Cuando se hace referencia al término *análisis*, se remite a una derivación de la palabra griega *ἀνάλυσις*, que significa *descomposición*; en términos matemáticos, se refiere a derivadas e integrales, las cuales permitirán obtener resultados para el presente estudio (Agulló, 1989). El análisis armónico se ocupa de la descomposición de funciones en tonos puros que se sintetizan en una sola palabra: *armónicos*. De manera menos rigurosa, consideramos *tonos puros* a ciertos objetos que nos recuerdan a las funciones $\sin(2\pi nx)$ y $\cos(2\pi nx)$ con $n \in \mathbb{Z}$, que forman parte de algunos desarrollos de Fourier de manera clásica.

Como hemos mencionado en el capítulo anterior, se entiende que el proceso de descomponer un sonido de un instrumento musical o cualquier otra función periódica en sus ondas senos y cosenos constituyentes se llama análisis de Fourier. De manera similar, la onda de sonido se puede caracterizar en términos de las amplitudes de las ondas sinusoidales componentes que la conforman. Además, el conjunto de números indica el contenido armónico de un sonido, y a veces se refiere al espectro armónico del sonido. En consecuencia, la cantidad de armónicos es determinante para definir la calidad o timbre de una nota musical. Una vez que se reconoce mediante el análisis de Fourier la cantidad de armónicos en un sonido musical sostenido, se es capaz de sintetizar dicho sonido mediante una serie de generadores de tonos puros, ajustando correctamente sus amplitudes y fases. Este proceso se denomina síntesis de Fourier.

En el desarrollo del análisis se ha tenido en cuenta la frecuencia del sonido que produce una cuerda, sabiendo que depende de su longitud y de su masa: a menor longitud, mayor frecuencia, y a mayor longitud, menor frecuencia. Por lo tanto, si varía la frecuencia, entonces un sonido con una frecuencia más alta se percibe como

más agudo. Con esta premisa, se ha decidido hacer el análisis en las tres últimas cuerdas de la guitarra clásica (4ª Re, 5ª La y 6ª Mi), ya que estas permiten un mejor estudio y análisis de los resultados. Es importante recalcar que en la guitarra todas las cuerdas tienen igual longitud, pero varía su grosor y densidad (masa). Por tanto, al pulsarlas, producen sonidos de distintas frecuencias. Si acortamos la longitud de la cuerda, es decir, si pulsamos una cuerda al aire y luego volvemos a pulsarla, pero pisando en un traste, el sonido que se obtiene es más agudo porque la longitud de la cuerda que vibra es menor.

2.1. MATLAB: APLICACIÓN DE LA “FFT” EN UN SONIDO PARA OBTENER UN TONO PURO

Después de realizar una meticulosa grabación de las tres últimas cuerdas de la guitarra (con una duración máxima de 2 segundos), procedimos a crear un simulador en MATLAB que capturó el sonido, lo procesó con la Transformada Rápida de Fourier (TRF o “Fast Fourier Transform”, FFT), mostró sus coeficientes y estableció el espectro de cada una de las señales. Sin embargo, para un análisis más profundo, utilizamos el software de análisis acústico Sonic Visualiser, que proporcionó un enfoque más detallado de cada espectro.

A continuación, justificamos el uso de MATLAB en el proceso de filtrado de sonido, explicando de manera general el funcionamiento del simulador para obtener los resultados que se presentan más adelante. Para esto, partimos del hecho de que la FFT —como se ha determinado en el capítulo anteriores (preliminares sección 1.5)— permite reducir el tiempo de cálculo de n^2 pasos a $n \cdot \log_2(n)$. Además, es necesario que el número de puntos de la serie sea una potencia de 2 (2^2 puntos). Dado que las vibraciones de las cuerdas de la guitarra cumplen esta condición, se justifica inicialmente la utilización de la Transformada Rápida de Fourier y su aplicación.

Ahora, planteando la generalización del proceso por el que pasa cualquier señal descrita por un conjunto de n (potencias de dos) pares de datos (t_j, x_j) igualmente espaciados en el tiempo, por un intervalo Δt , desde $t = 0$ hasta $t_{\text{final}} = (n - 1)\Delta t$. La inversa del in-

tervalo Δt , se denomina frecuencia de muestreo f_s . De manera que el vector de tiempo se identifica por $t = (0: n - 1)/f_s$. Luego la `FFT` de `MATLAB` hace una conversión del vector en valores de la señal x en la función del tiempo t en un vector g en función de la frecuencia ω . Por lo que se obtiene $g = \text{FFT}(x)$.

Donde g es un vector cuyos elementos son números complejos que permiten guardar información acerca de la amplitud de la fase. Cabe agregar que se hace necesario asociar cada elemento del vector g con una frecuencia, y a su vez cada elemento del vector x con el tiempo. Ahora bien, el intervalo de frecuencia es $\Delta\omega = 2\pi (n \cdot \Delta t) = 2\pi f_s/n$, donde la mínima frecuencia es 0 y la máxima $\omega_{\max} = 2\pi f_s(n - 1)/n$. Por lo que es conveniente tomar la resolución espectral como $\Delta\omega$, lo que es proporcional al tiempo total $n \cdot \Delta t$ de la recolección de datos mediante la serie temporal.

Luego de conocer el intervalo de tiempo que se determinó como Δt o la frecuencia de muestreo $\Delta t = 1/f_s$ y el número de pares de datos n (potencia de 2), creamos el vector de tiempos t y el vector de frecuencias angulares ω con una estructura general como la siguiente:

```
>> n=length(x);
>> t= (0: n-1) *dt;
>> dw=2*pi/(n*dt);
>> w= (0: n-1) * dw;
```

Con lo anterior se puede obviar por un momento la fase y estructurar la amplitud, calculando y representando el cuadrado de los elementos del vector anteriormente mencionado g .

Adicionalmente se determina a p como el espectro de potencia.

$$P = |g(\omega)|^2 \quad (101)$$

Finalmente, para ilustrar la aplicación de la función `FFT` de `MATLAB`, se analiza la señal formada por la suma de algunos armónicos de fre-

cuencias angulares, obteniendo así la gráfica de la señal capturada. El proceso descrito sintetiza lo que se ha tenido en cuenta para la realización del simulador en `MATLAB`, justificando la utilización de la `FFT` debido a que se ha llevado a cabo una grabación de 2 segundos en la que se encuentran diversas vibraciones que requieren un proceso extenso y tedioso. Para mostrar mejor el proceso realizado, se encuentran los códigos que permitieron el análisis de las frecuencias en el capítulo de anexos.

2.1.1. Análisis de la 4ª cuerda al aire

Para el análisis espectral de la señal de la 4ª cuerda al aire se estableció la descomposición de dicha señal en los diversos componentes dentro del dominio frecuencial. Este análisis comienza por la captura de la señal en el software matemático `MATLAB`. Esto ha permitido obtener el espectro de la 4ª cuerda al aire (ver figura 10). Su frecuencia es de 146,83 Hz:

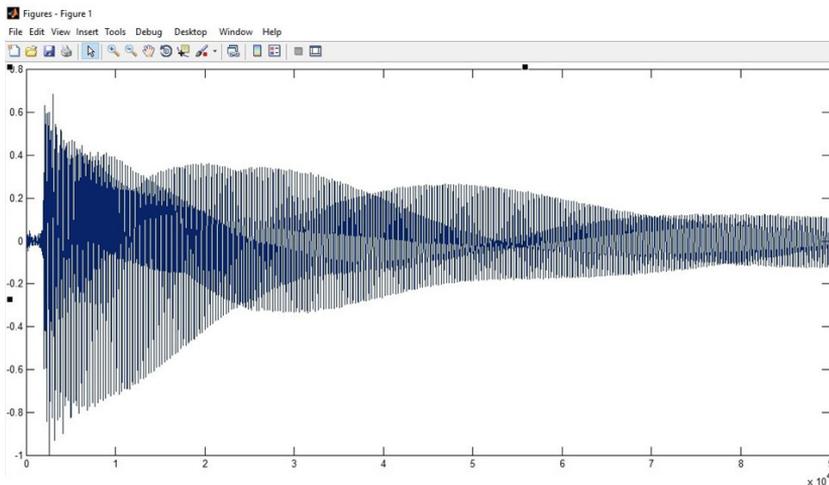


Figura 10. Señal de la 4ª cuerda al aire
Fuente: `MATLAB`.

En la Figura 10 se presenta la señal natural (sin filtro) que muestra el espectro de frecuencia caracterizado por la distribución de amplitudes para cada repetición del fenómeno ondulatorio. Para el análisis de Fourier, comenzamos con las transformadas de señales.

Para ello, se hizo hincapié en la aplicación de la transformada de Fourier y su inversa. Además, se analiza el espectro de la señal recibida (ver Figura 11), en la que se observa un pico correspondiente a la señal portadora, y se sabe que las amplitudes más bajas son las que se desean extraer.

Para este propósito, se implementó un filtro adecuado que opera en el dominio de la frecuencia para aislar la onda portadora seleccionada antes de aplicar la operación de demodulación (que engloba el conjunto de técnicas para transmitir información sobre una onda portadora, generalmente una onda sinusoidal). Esto permite un uso más eficiente del canal de comunicación, lo que posibilita transmitir más información simultáneamente y protegerla de interferencias y ruidos (Kreyszig, 2013).

En este proceso se requiere que la señal transformada sea multiplicada por 1 en aquellas componentes que se desean conservar y por 0 en aquellas que se quieren eliminar. Aunque es conveniente que pase la onda portadora de frecuencia, es necesario tener en cuenta que el espectro de la señal de información se centra en esta frecuencia. Por lo tanto, se construye un filtro en el dominio de la frecuencia, y se elige un filtro de pasa banda con un ancho de banda apropiado.

No obstante, mientras más amplio sea el ancho de banda seleccionado, más ruido se permitirá pasar. Por tanto, se necesita encontrar un equilibrio entre el ancho de banda necesario para recuperar una buena señal y la eliminación del ruido. Afortunadamente, como conocemos el ancho de banda de nuestra señal de información, podemos tomar una decisión informada.

También se ha desarrollado un código que permite aplicar un filtro de banda ancha a la señal, utilizando la FFT. Esto permite obtener únicamente la frecuencia fundamental de la señal capturada (ver Figura 12). A continuación, se muestra una comparación entre dos

señales: la primera corresponde a la señal de la 4ª cuerda al aire sin transformación, seguida de la señal obtenida al aplicar la transformada inversa, con el objetivo de observar su estructura.

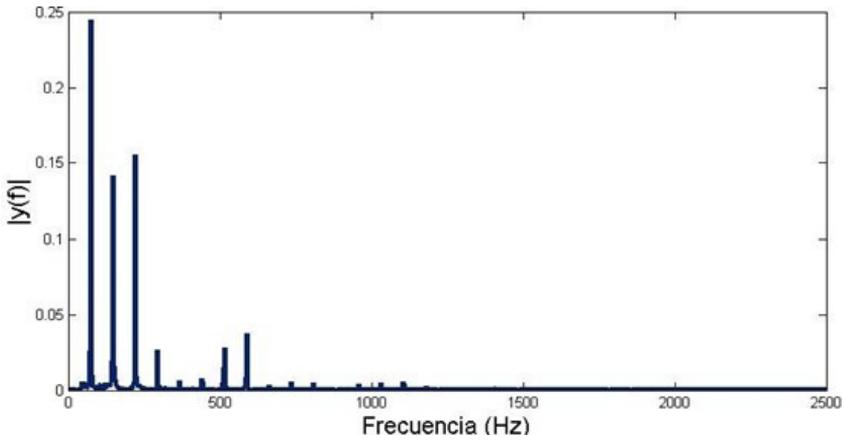


Figura 11. Espectro de amplitud en una sola cara de $y(t)$.
Fuente: MATLAB.

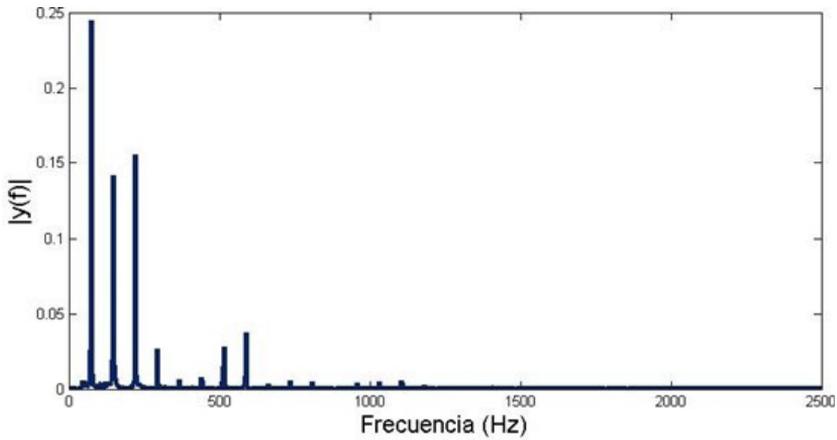


Figura 12. Espectro de amplitud en una sola cara de $y(t)$ aplicando la FFT
Fuente: MATLAB.

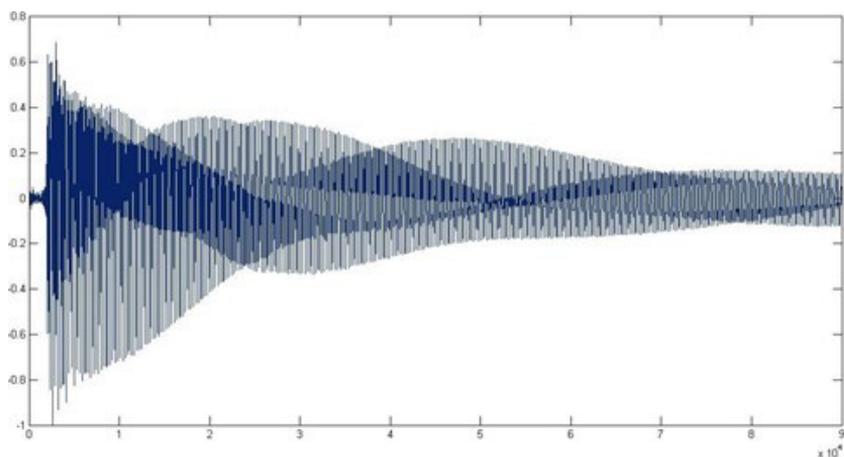


Figura 13. Señal natural

Fuente: Sonic Visualiser.

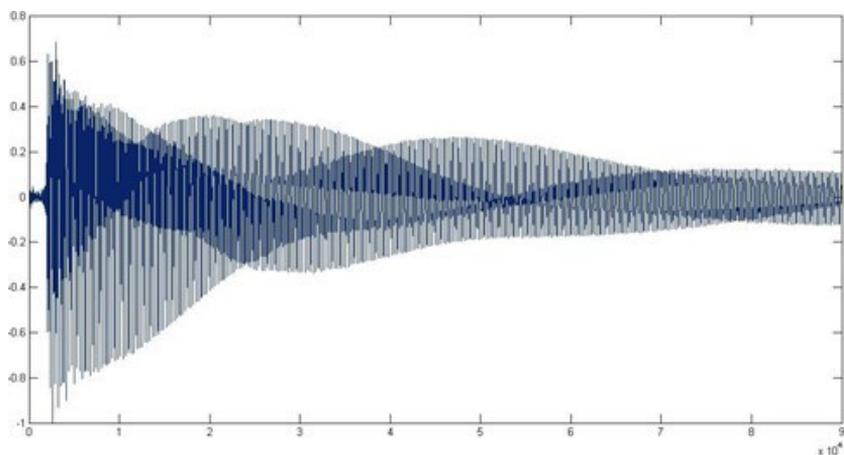


Figura 14. Transformada de la señal

Fuente: Sonic Visualiser. Sonic Visualiser.

Finalmente, se han obtenido las imágenes de los dos espectrogramas, lo que hace que el análisis y la comparación entre la señal natural y la que ha pasado por el filtro mediante la transformada rápida de Fourier sean más visuales.

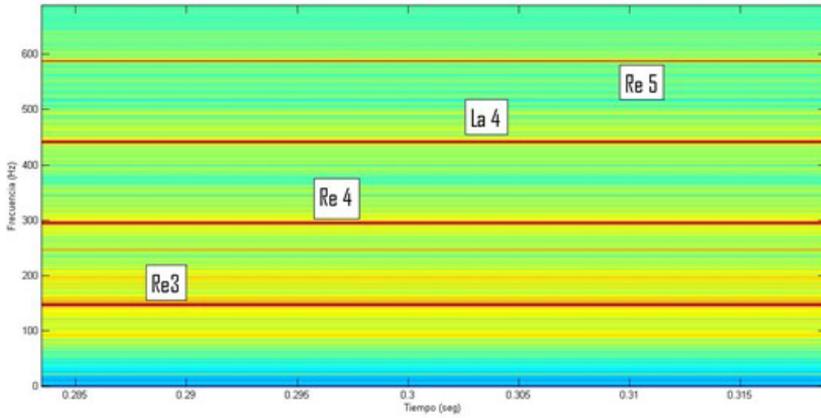


Figura 15. Espectrograma 4ª cuerda al aire
Fuente: MATLAB

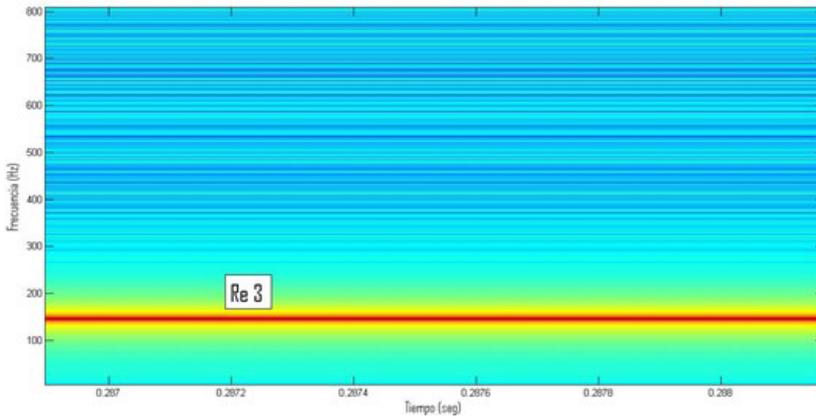


Figura 16. Tono puro
Fuente: MATLAB.

2.1.2. Análisis de la 5ª cuerda al aire

Cuando una cuerda elástica se encuentra tensionada, vibra libremente bajo su propio peso después de ser golpeada. Esta vibración genera un sonido en forma de ondas de choque que se corresponden

con el ritmo. En este caso, la 5ta cuerda al aire vibra a una frecuencia de 110,00 Hz

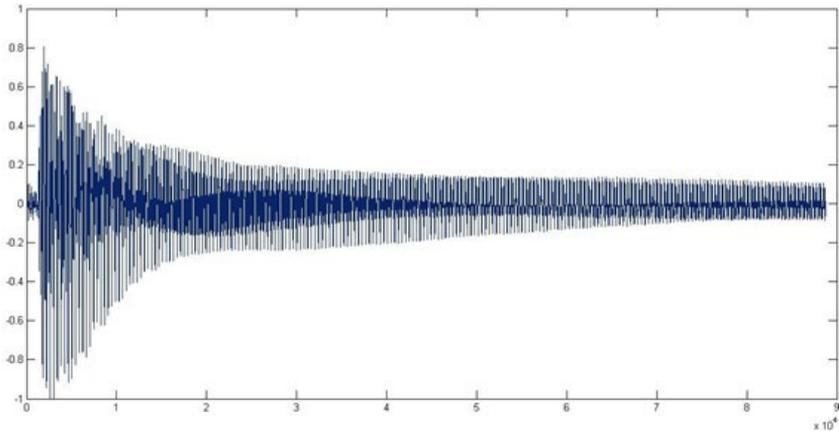


Figura 17. Espectro de la 5ª cuerda
Fuente: Sonic Visualiser.

El espectro de una señal es la representación de la distribución de amplitudes de cada frecuencia. A continuación, se muestra el espectro obtenido de la 5ª cuerda al aire. En términos más precisos, el espectro es el gráfico que representa cada frecuencia contenida en una señal. En la Figura 18, se presenta el espectro resultante después de aplicar la TRF. En esta figura, se puede observar una única franja o frecuencia que corresponde al tono puro. Esto se logra eliminando las demás frecuencias o armónicos.

Además, se ha establecido que la TRF permite llevar a cabo una limpieza o filtrado de la señal, análisis de señales permite descubrir aspectos que a menudo son difíciles o incluso imposibles de observar a partir de una representación temporal. Por ejemplo, si observamos la Figura 17, se muestra un tono sinusoidal puro. Sin embargo, el espectrograma de la señal, representado en la Figura 18, revela la presencia de otras componentes secundarias o, en otras palabras, frecuencias de los armónicos que acompañan a la frecuencia fundamental en el sonido.

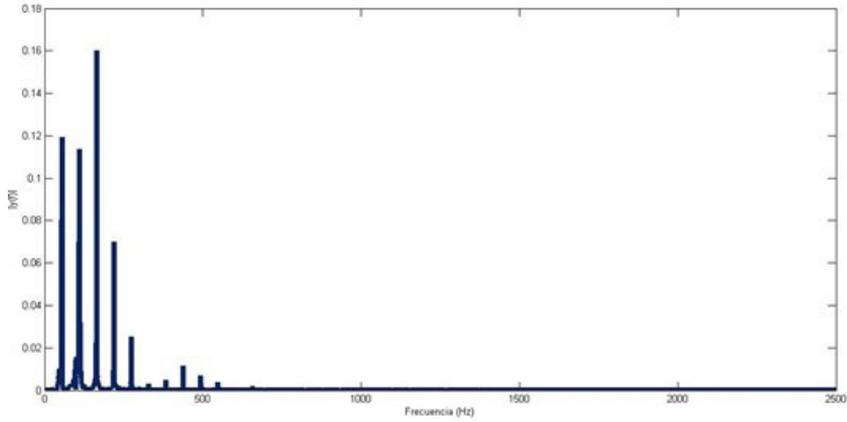


Figura 18. Espectro de amplitud en una sola cara
Fuente: MATLAB.

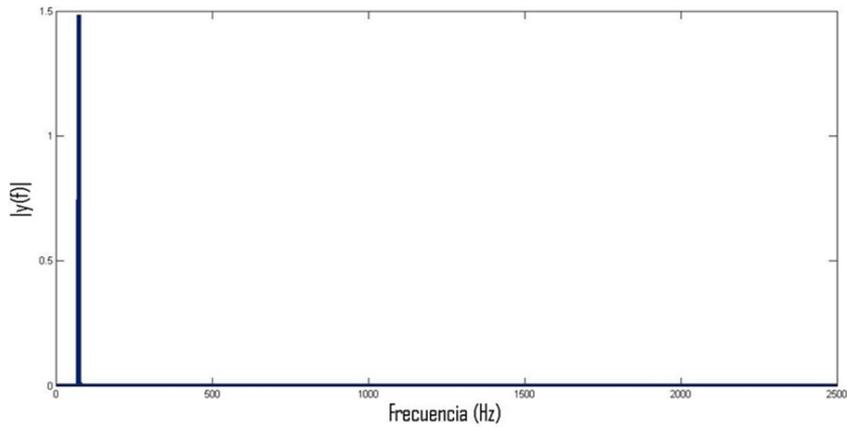


Figura 19. Espectro de amplitud en una sola cara de $y(t)$ aplicando FFT
Fuente: MATLAB.

Es importante recordar que el sonido se produce mediante la funcionalidad y superposición de frecuencias. Por esta razón, es indispensable utilizar transformadas como la que hemos mencionado, pues permite inicialmente realizar una descomposición de cada frecuen-

cia y generar la eliminación de las frecuencias que acompañan a la fundamental.

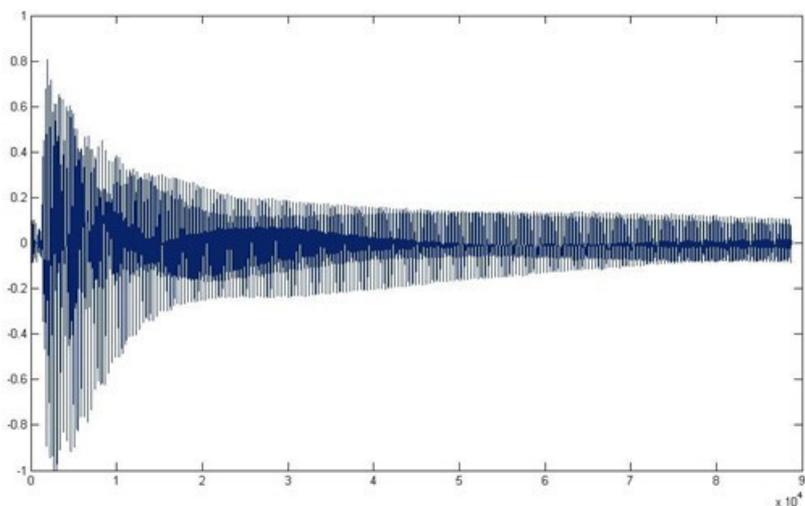


Figura 20. Espectro de la 5^a cuerda al aire
Fuente: Sonic Visualiser

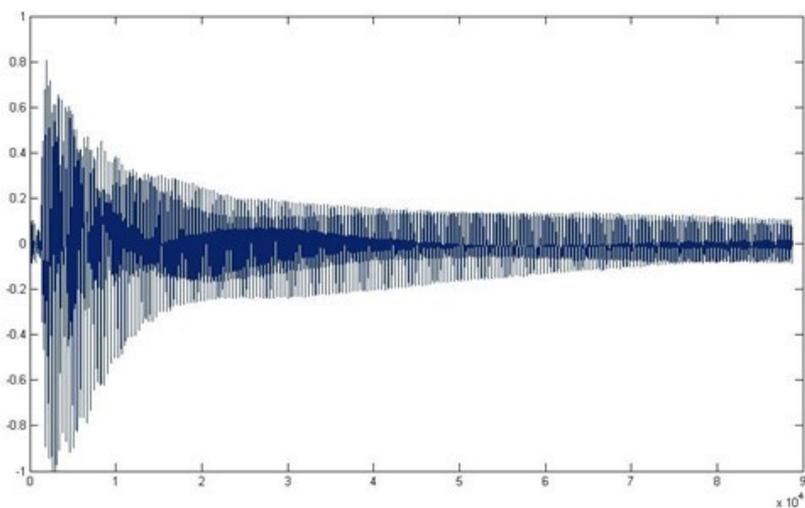


Figura 21. Espectro de la 5^{ta} cuerda al aire.
Fuente: Sonic Visualiser

Como se mencionó previamente, en la Figura 19 se presentan tanto el espectro natural como el espectro después de aplicar el filtro.

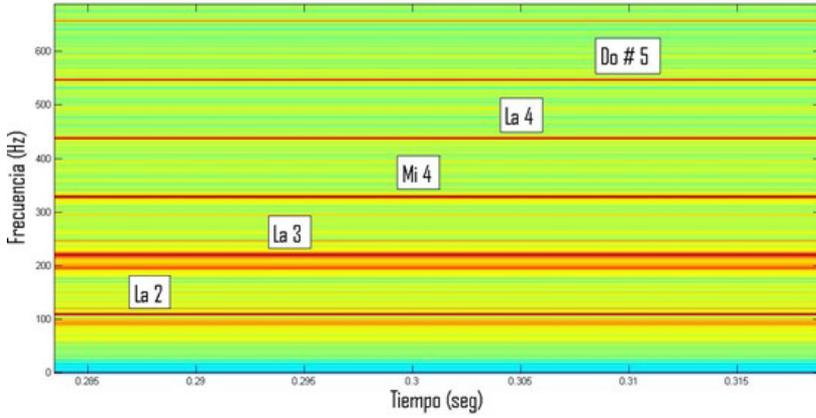


Figura 22. Espectrograma 5ª cuerda al aire
Fuente: MATLAB.

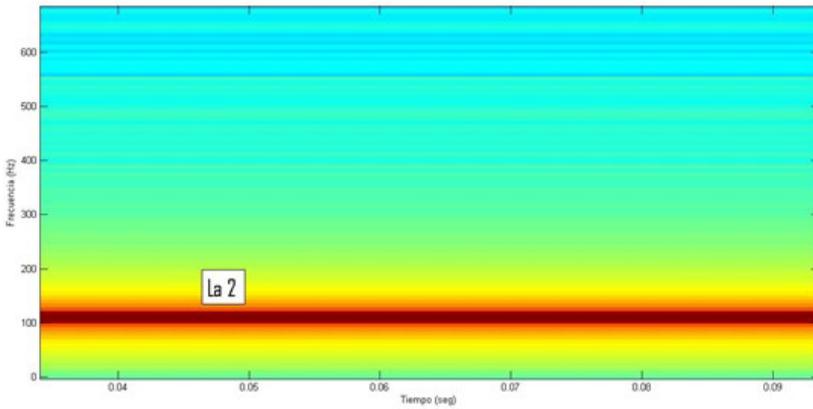


Figura 23. Tono puro
Fuente: MATLAB.

2.1.3. Análisis de la 6ª cuerda al aire

En línea con el enfoque utilizado para las dos cuerdas anteriores, el análisis se basó principalmente en la grabación de la cuerda y posteriormente en la creación de un simulador en `MATLAB`. La Figura que se presenta a continuación (Figura 24) es el resultado de capturar el sonido utilizando la función o código `[y fs]=wavread('6TA.wav')`. Como resultado, se obtiene un espectro con una frecuencia de 82,40 Hz correspondiente a la cuerda al aire.

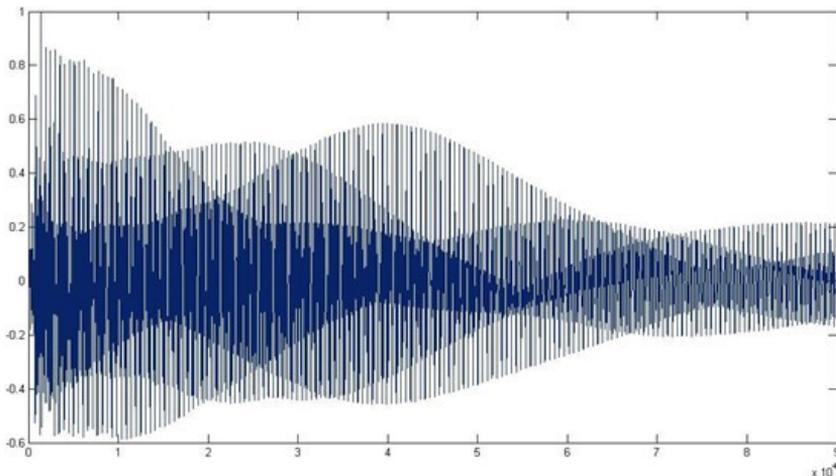


Figura 24. Espectro de la 6ª cuerda al aire
Fuente: Sonic Visualiser.

Al continuar con el estudio se estableció y justificó la necesidad de observar el espectro desde una única perspectiva, ya que esto permite visualizar de manera cómoda todas las frecuencias presentes en el sonido.

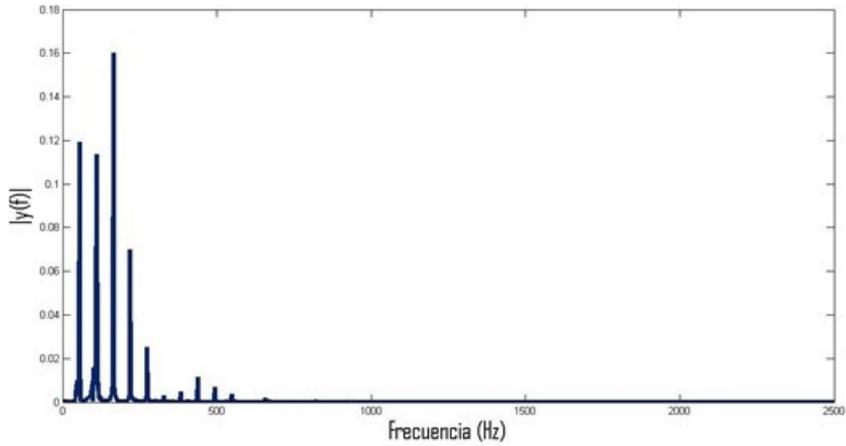


Figura 25. Espectro de la amplitud en una sola cara de $y(t)$
Fuente: MATLAB Y SONIC VISUALISER.

Mediante la aplicación de la transformada en la señal, se obtuvo la siguiente figura (ver figura 20), la cual corresponde al espectro del tono puro.

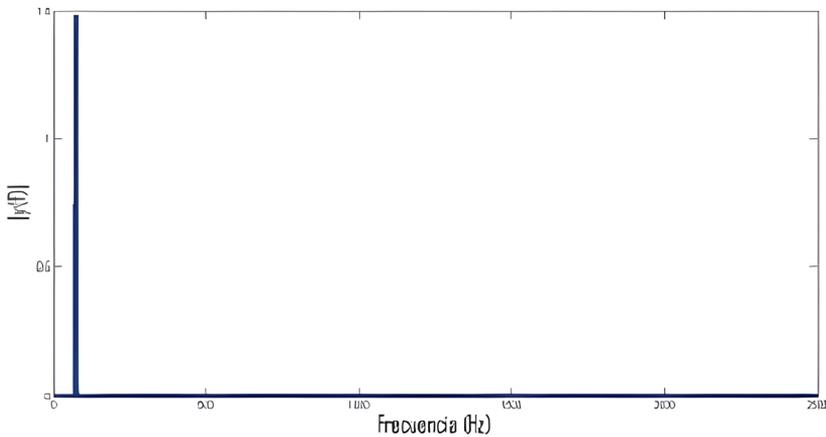


Figura 26. Espectro de amplitud en una sola cara de $y(t)$ aplicando la fft
Fuente: Sonic Visualiser.

Cuanto más tensa esté la cuerda, mayor será su frecuencia de vibración (el número de veces que oscila por segundo) y, por tanto, el sonido será más agudo. Esto explica la notoria diferencia entre las tres cuerdas.

Del mismo modo, manteniendo la tensión constante, si la longitud de la cuerda es más corta, la frecuencia será mayor y, por lo tanto, se emitirá un sonido más agudo.

En última instancia, podemos reafirmar —a través del desarrollo de este análisis— que la FFT permite redefinir las señales en términos de componentes sinusoidales. Lo único que debe hacerse es determinar el efecto que cualquier sistema tiene en todos los posibles componentes sinusoidales (su función de transferencia). De esta manera, se logrará una comprensión completa del sistema.

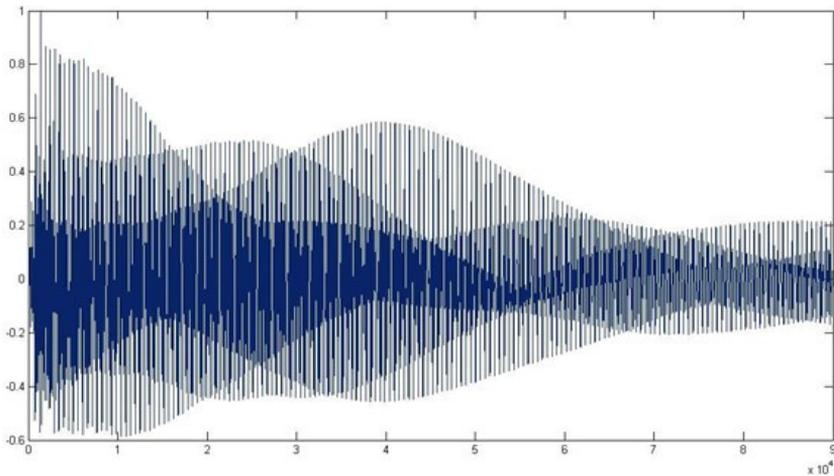


Figura 27. (a) Espectrogramas de la 6ª cuerda al aire
Fuente: Sonic Visualiser.

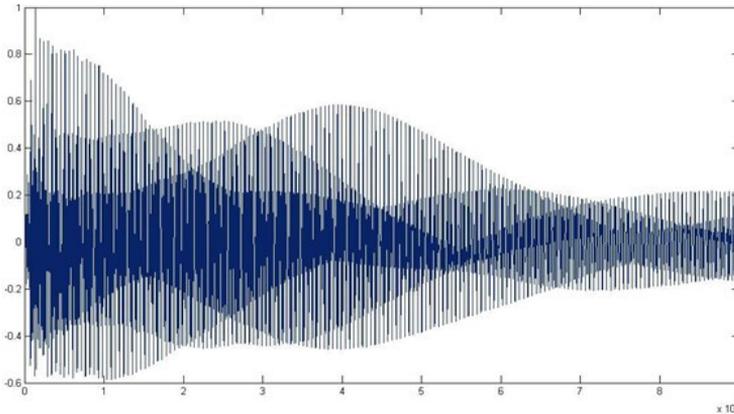


Figura 28. (b) Transformada inversa de la señal natural
Fuente: Sonic Visualiser

Además, una señal es cualquier magnitud que podemos medir de alguna forma y que contiene información sobre el comportamiento o la naturaleza de algún fenómeno. Por esta razón, es posible visualizarla utilizando el simulador.

Finalmente, en la Figuras 29 y 30 se presentan dos espectrogramas; en el primero se muestran el tono puro y los armónicos, mientras que en el segundo se presenta únicamente el tono puro.

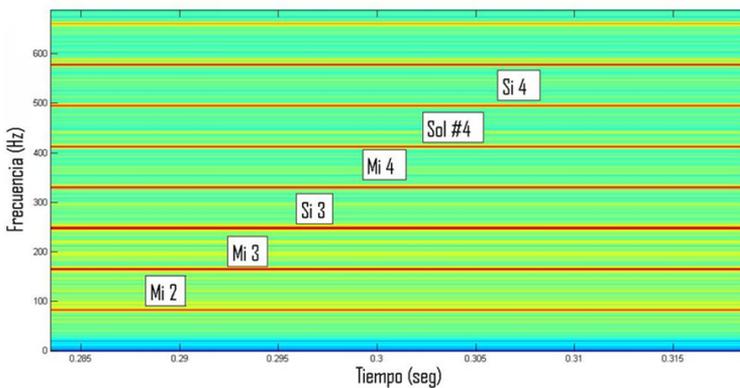


Figura 29. Espectrogramas de la 6ª cuerda al aire señal natural
Fuente: MATLAB.

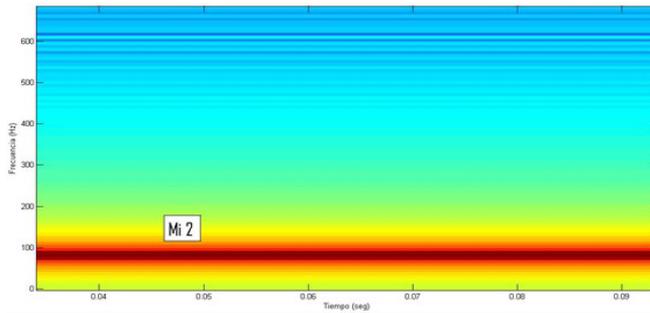


Figura 30. Filtro
Fuente: MATLAB.

2.2. SONIC VISUALISER: OBSERVACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LOS ESPECTROS GENERADOS

Para comenzar esta sección, es esencial comprender la funcionalidad de este software en el análisis. Sonic Visualiser es un programa que visualiza y analiza el contenido de archivos de audio. En este programa se llevó a cabo la captura de las señales de las cuerdas al aire (4ª, 5ª y 6ª), lo que resultó en la obtención de espectrogramas en los cuales se pudo observar lo siguiente:

2.2.1. Espectrograma de la 4ª cuerda al aire

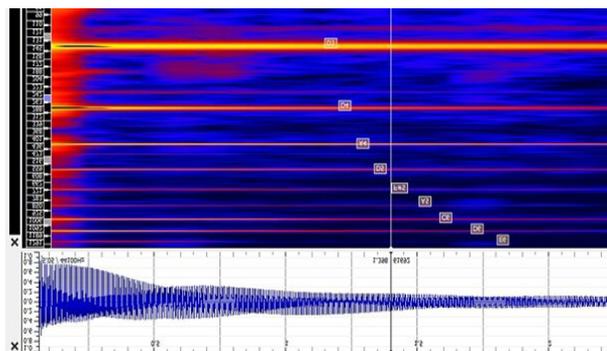


Figura 31. Espectrograma 4ª cuerda al aire
Fuente: Sonic Visualiser.

2.2.2. Espectrograma de la 4ª cuerda al aire

En la Figura 31 se presenta el espectrograma de la cuarta cuerda al aire, proporcionando una visualización detallada de las frecuencias presentes en la señal. La representación en azul es similar a la obtenida mediante `MATLAB` y muestra el espectro de frecuencias. En la parte inferior del espectrograma se destaca la representación de la señal en sí, junto con la identificación de cada uno de los armónicos asociados al sonido.

El armónico con la frecuencia fundamental más alta es D3 o Re3, con una frecuencia de 146.832 Hz. Además, se identifican otros armónicos que componen el sonido, incluyendo:

Primer armónico: D4 (Re4) - 293.665 Hz

Segundo armónico: A4 (la4) - 440 Hz

Tercer armónico: D5 (Re5) - 587.330 Hz.

Cuarto armónico: F# 5 (Fa# 5, sostenido) - 739.989 Hz

Quinto armónico: A5 (la5) - 880 Hz

Sexto armónico: C6 (Do6) - 1046.502 Hz

Séptimo armónico: D6 (Re6) - 1174.659 Hz

Octavo armónico: E6 (Mi6) - 1318.510 Hz

Este análisis reafirma que un sonido está compuesto por una frecuencia fundamental junto con múltiples armónicos que contribuyen a su calidad y timbre.

2.2.3. Espectrograma de la 5ª cuerda al aire

Cuando se estableció el análisis mediante la serie de Fourier —específicamente utilizando la `FFT`—se tuvieron en cuenta las limitaciones inherentes al algoritmo en la señal y en el espectro resultante. Estas limitaciones pueden incluir la resolución de frecuencia y el ancho de

banda, lo cual puede afectar la precisión con la que se representan las componentes frecuenciales en el espectro.

Además, las señales que se tomaron como muestra cumplieron con tener una duración igual (2 segundos); esto se hizo con el propósito de lograr establecer comparaciones coherentes entre ellas. La igualdad en la duración de las señales admite crear una base sólida para el análisis y la comparación de las frecuencias presentes en cada una.

Sonic Visualiser ha demostrado ser una herramienta valiosa para la descomposición y visualización de las frecuencias presentes en las señales. Los espectrogramas generados con este software permiten una representación más clara y visual de las frecuencias y sus armónicos asociados. En cada espectrograma que se muestra con el software, se determina un orden de frecuencias en el que la frecuencia más alta corresponde a la fundamental o tono puro, y las demás frecuencias son múltiplos armónicos de esa frecuencia fundamental.

En la Figura 32 se presenta el espectrograma de la 5ª cuerda al aire, en el cual se visualiza la frecuencia fundamental que corresponde a un A2 (La2), y las demás frecuencias representan los armónicos que contribuyen a la agradable sonoridad de la señal.

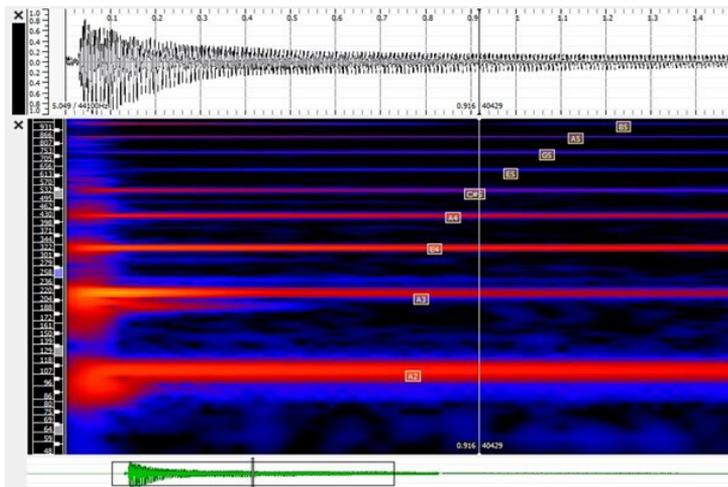


Figura 32. Espectrograma 5ª cuerda al aire
Fuente: Sonic Visualiser

Según lo establecido, se puede identificar lo siguiente, en relación con la 5ª cuerda al aire:

- Frecuencia fundamental A2 (La2) - 110 Hz
- Primer armónico A3 (La3) - 220 Hz
- Segundo armónico E4 (Mi4) - 329.628 Hz
- Tercer armónico A4 (La4) - 440 Hz
- Cuarto armónico C#5 (Do#5) - 554.365 Hz
- Quinto armónico E5 (Mi5) - 659.255 Hz
- Sexto armónico G5 (Sol5) - 783.991 Hz

2.2.4. Espectrograma 6ª cuerda al aire

En la etapa final del análisis, se obtuvo la frecuencia fundamental y los armónicos correspondientes de la señal generada por la 6ª cuerda al aire. El espectrograma resultante se presenta en la Figura 33, en la cual se observa la representación visual de la descomposición espectral de la señal. En la parte inferior de dicho espectrograma se ha generado una lista que contiene la frecuencia fundamental, su nota musical correspondiente y los armónicos asociados. Esta lista se encuentra ordenada en función de la frecuencia.

El propósito principal de esta representación es verificar la viabilidad en la realización de la descomposición de la señal y confirmar que mediante el uso de la TRF es posible aplicar un filtro para conservar únicamente la frecuencia fundamental.

Es esencial tener en mente que este procedimiento es factible gracias a que la TRF es un método matemático que transforma una función en el dominio del tiempo en una representación en el dominio de la frecuencia. Esto permite separar y analizar las diferentes frecuencias presentes en una señal, brindando una comprensión más profunda de su contenido armónico y espectral.

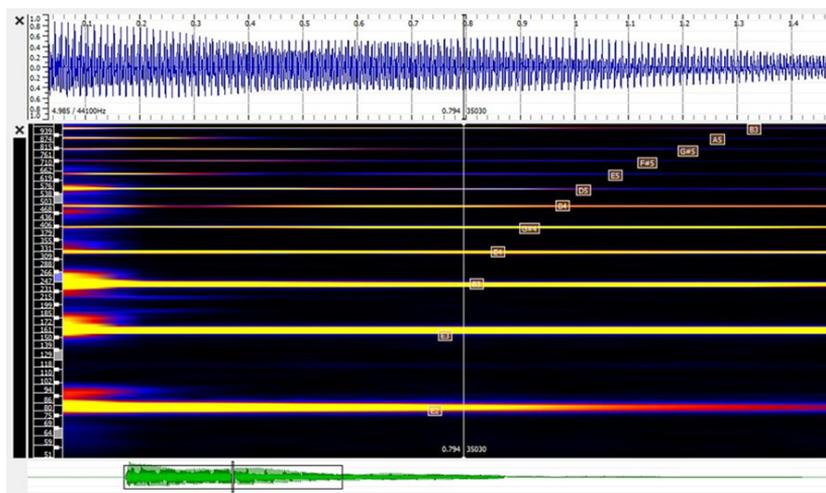


Figura 33. Espectrograma 6^a cuerda al aire
Fuente: Sonic Visualiser.

Con base en lo previamente mencionado, se establecen los siguientes aspectos:

- Frecuencia fundamental E2 (Mi2) (82,407 Hz)
- Primer armónico E3 (Mi3) (164,814 Hz)
- Segundo armónico B3 (Si3) (246,942 Hz)
- Tercer armónico E4 (Mi4) (329,628 Hz)
- Cuarto armónico G# 4 (Sol# 4) (# sostenido) (415,305 Hz)
- Quinto armónico B4 (Si4) (493,883 Hz)
- Sexto armónico D5 (Re5) (586,977 Hz)
- Séptimo armónico E5 (Mi5) (659,255 Hz)
- Octavo armónico F# 5 (Fa# 5) (# sostenido) (739,989 Hz)
- Noveno armónico G# 5 (Sol# 5) (# sostenido) (830,609 Hz)

Es relevante destacar que Sonic Visualiser ha demostrado ser una herramienta sumamente útil para complementar el análisis previamente presentado. Esta herramienta ha proporcionado una representación visual y explícita de las señales, permitiendo una comprensión gráfica completa de cada una de ellas. Como resultado, se ha logrado

establecer un entendimiento esencial del comportamiento del sonido, al mostrar cada una de sus componentes y describir cada uno de los armónicos que rodean un tono puro.

2.3. COMPARACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS: MATLAB Y SONIC VISUALISER

En el proceso de investigación resultaba crucial contar con una fuente de verificación y validación de los resultados obtenidos. Para esto se empleó el software musical Sonic Visualiser, que previamente se mencionó, y que proporcionó las bases necesarias para identificar las frecuencias de cada uno de los armónicos presentes en el sonido, a través de sus respectivos espectrogramas. Simultáneamente, en el proceso de desarrollo del simulador en MATLAB, se llevó a cabo un análisis detallado de cada señal mediante la TRF y su transformada inversa. Por lo tanto, se justifica plenamente que el simulador se construyó y gestionó correctamente, ya que los resultados obtenidos coinciden de manera precisa.

En lo que sigue, se presentará una comparativa de los resultados logrados en el software musical Sonic Visualiser y en el simulador elaborado en MATLAB.

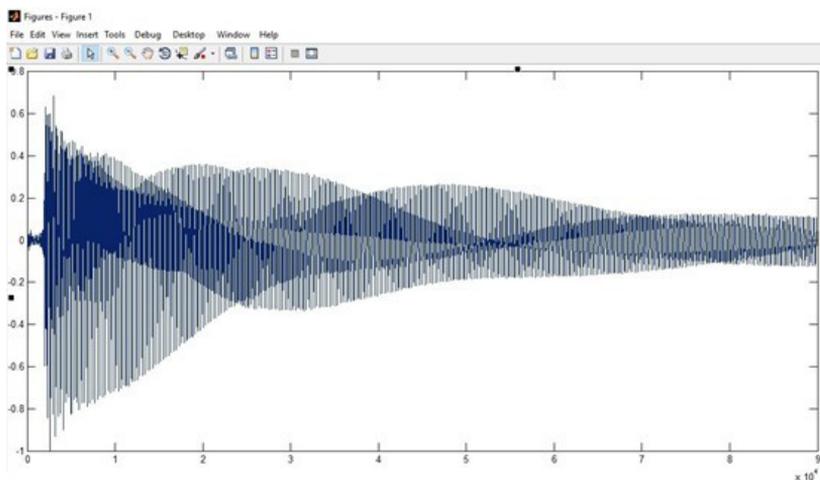


Figura 34. Espectrogramas 4ª cuerda al aire
Fuente: SONIC VISUALISER.

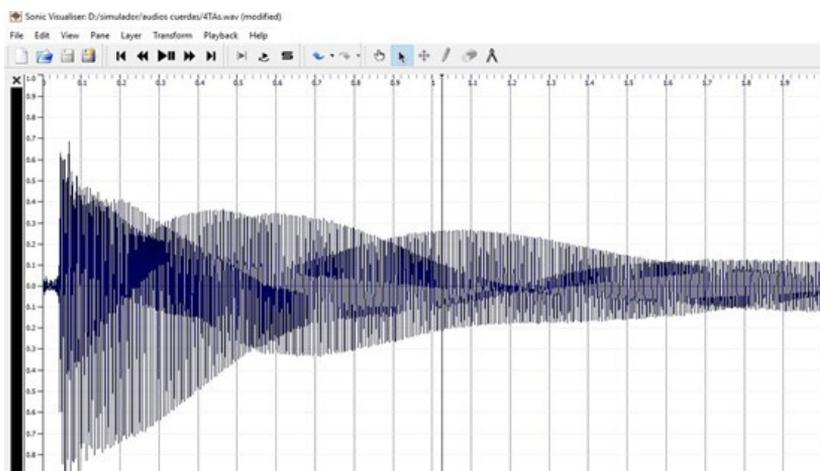


Figura 35. 4ª cuerda
Fuente: Sonic Visualiser.

Espectrograma 4ª cuerda al aire

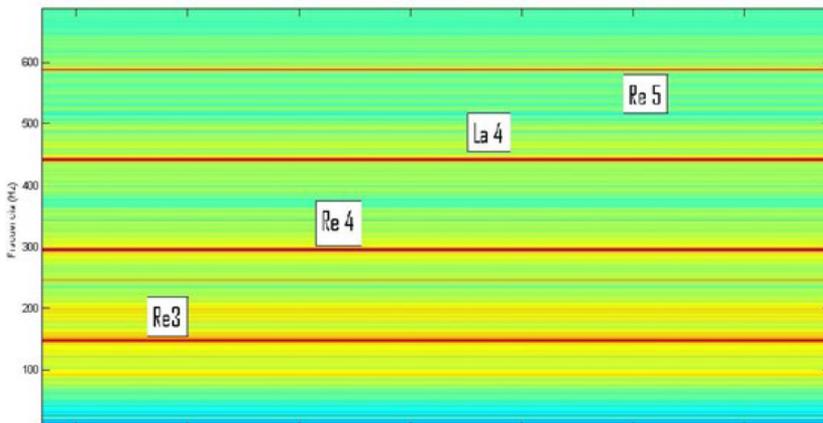


Figura 36. MATLAB.
Fuente: elaboración propia.

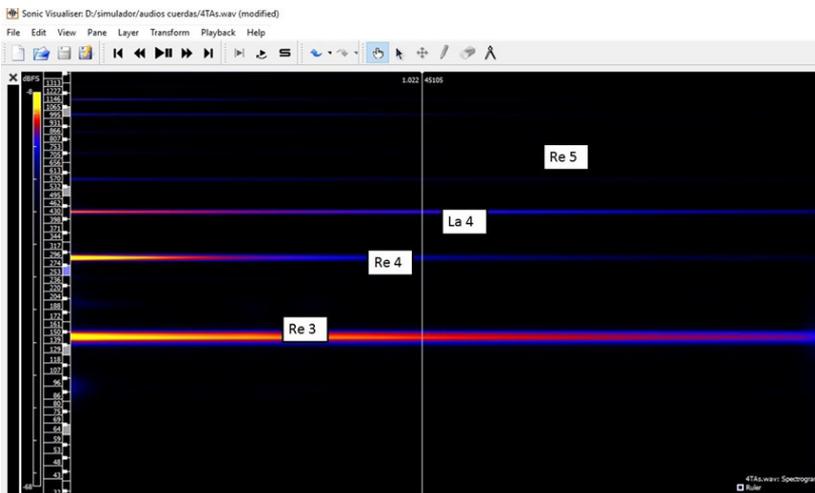


Figura 37. Sonic Visualiser
Fuente: elaboración propia.

Espectrograma tono puro 4ª cuerda

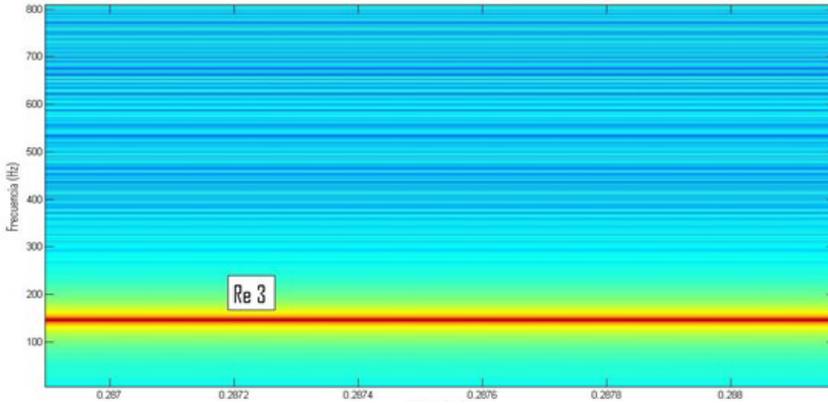


Figura 38. Sonic Visualiser
Fuente: elaboración propia.

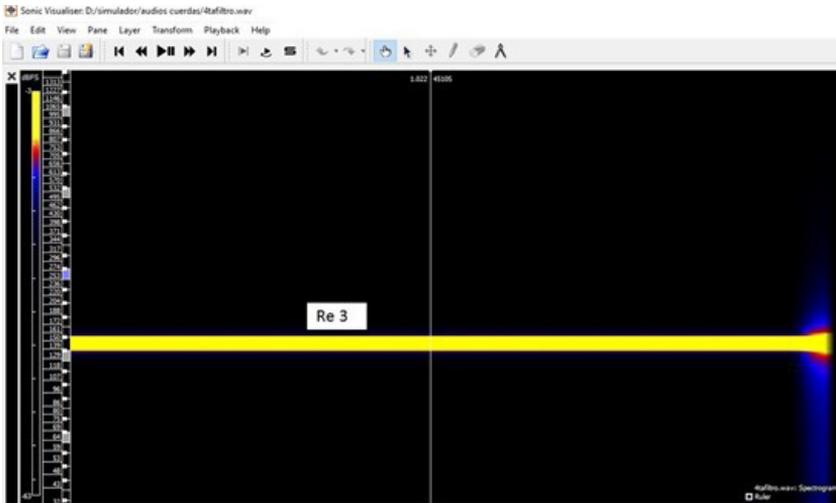


Figura 39. MATLAB
Fuente: elaboración propia.

Espectrograma 5ª cuerda al aire

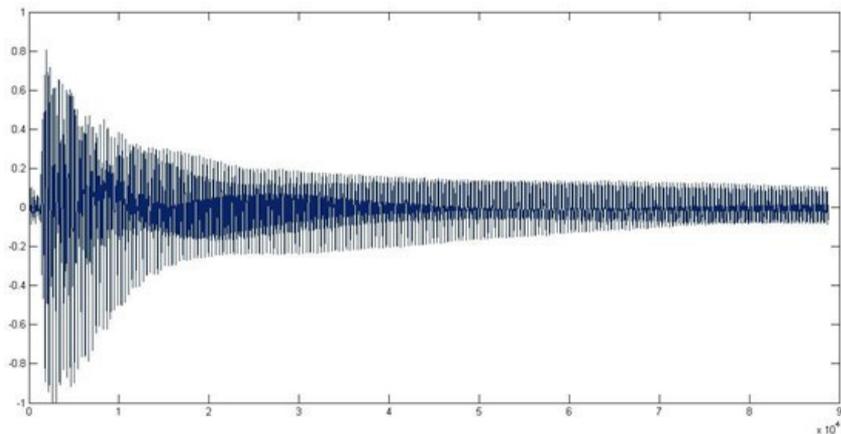


Figura 40. Sonic Visualiser
Fuente: elaboración propia.

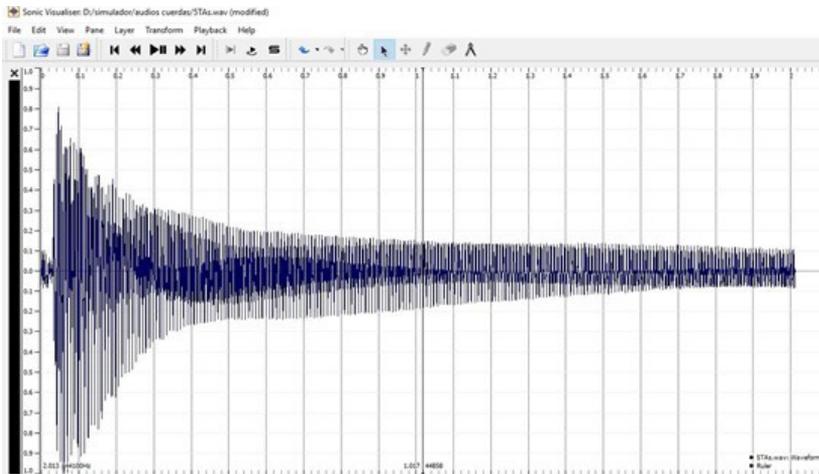


Figura 41. Sonic Visualiser
Fuente: elaboración propia.

Espectrograma 5ª cuerda al aire

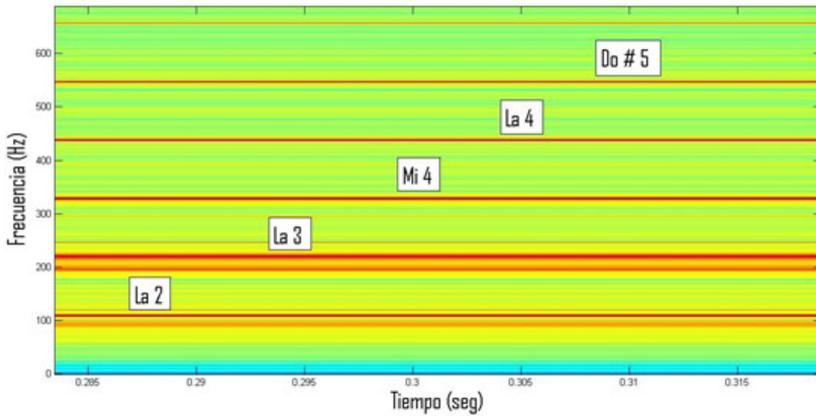


Figura 42. MATLAB
Fuente: elaboración propia.

Espectrograma tono puro 5ta cuerda

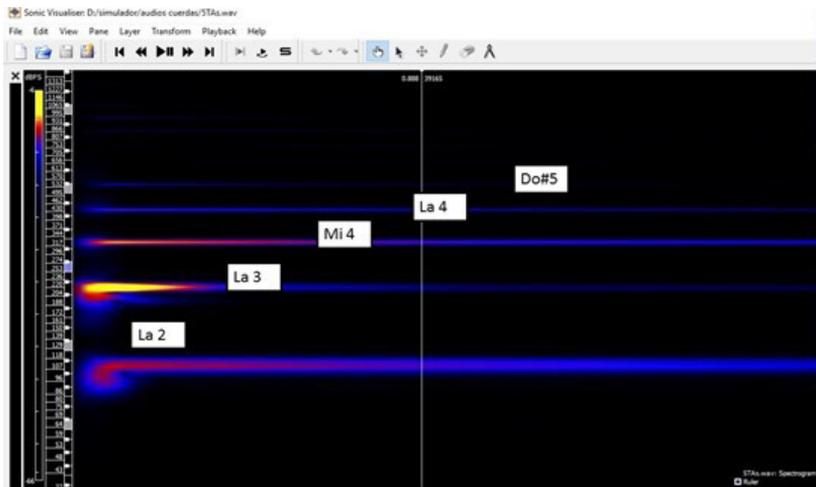


Figura 43. Sonic Viasualiser
Fuente: elaboración propia.

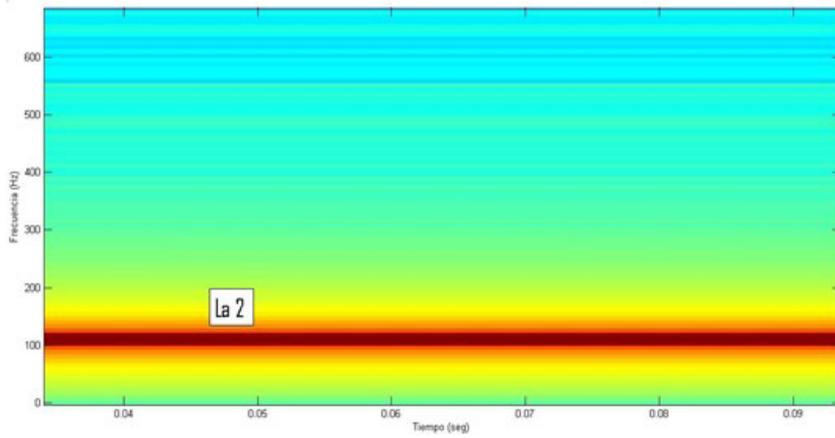


Figura 44. Sonic Visualiser
Fuente: elaboración propia.

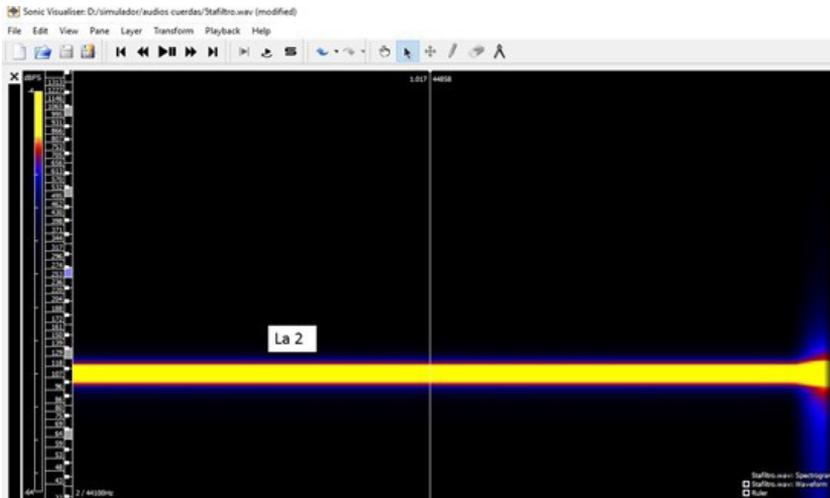


Figura 45. Sonic visualiser
Fuente: elaboración propia.

Espectrograma 6ª cuerda al aire

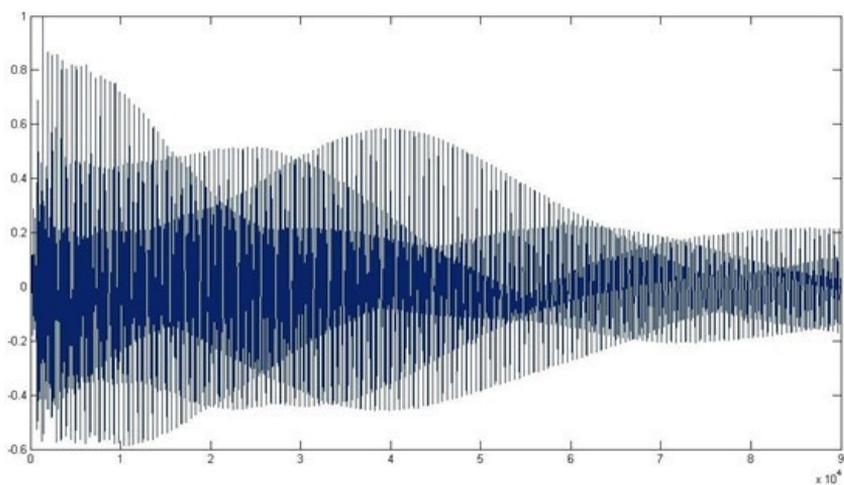


Figura 46. SONIC VISUALISER
Fuente: Elaboración propia.

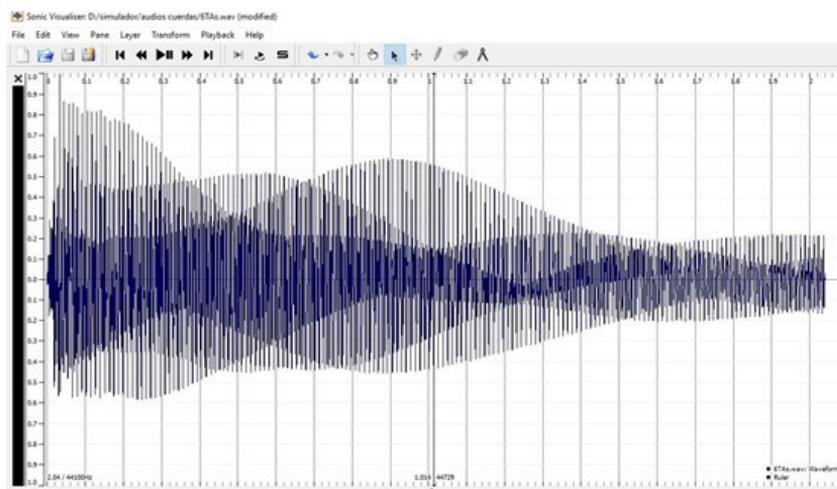


Figura 47. Sonic Visualiser
Fuente: elaboración propia.

Espectrograma 6ª cuerda al aire

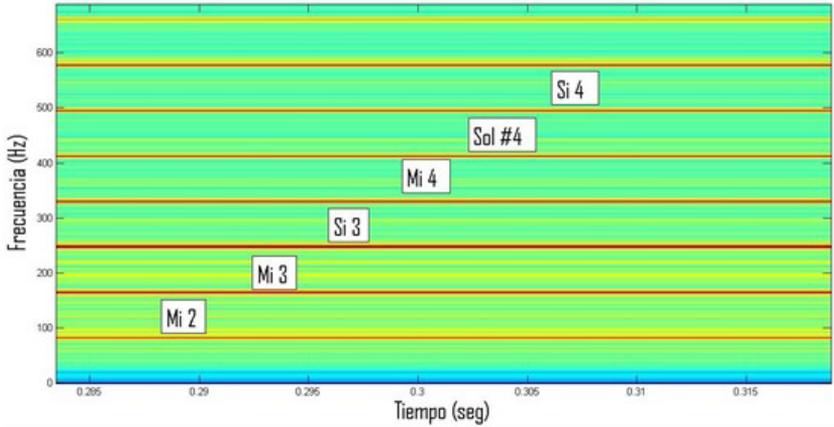


Figura 48. MATLAB
Fuente: Elaboración propia.

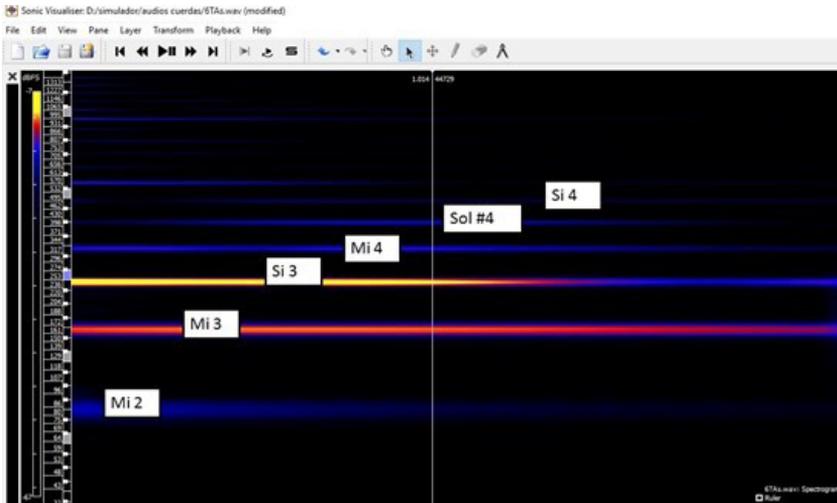


Figura 49. Sonic Visualiser
Fuente: elaboración propia.

Espectrograma tono puro 6ª cuerda

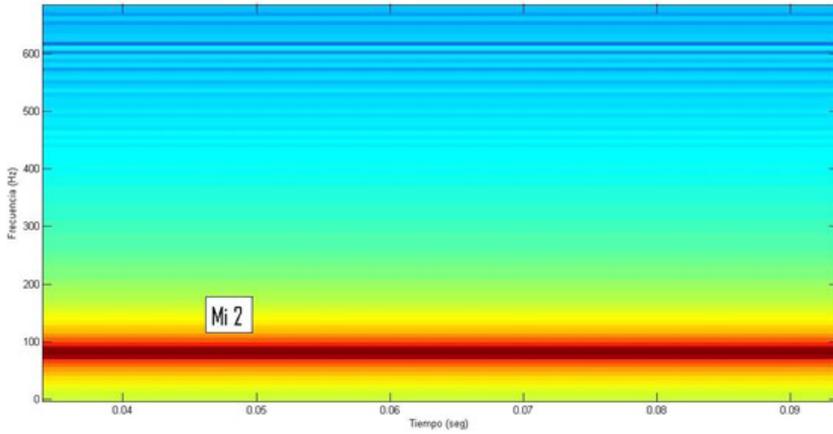


Figura 50. MATLAB
Fuente: Elaboración propia.

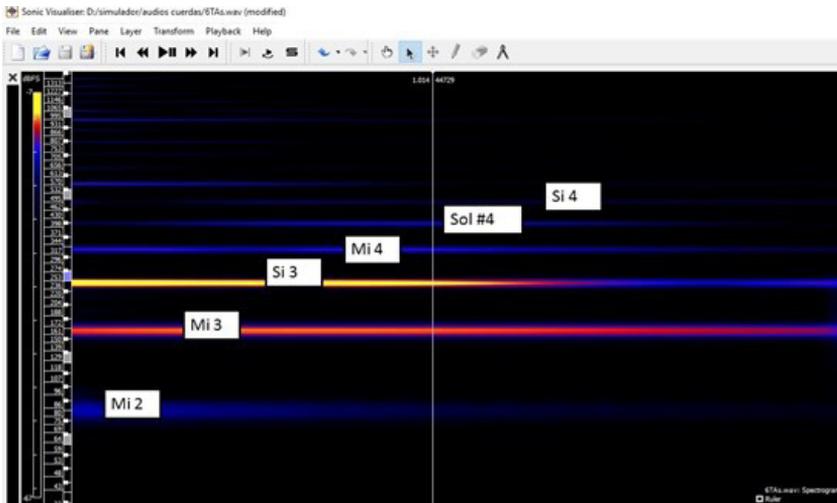


Figura 51. Sonic Visualiser
Fuente: elaboración propia.

EXPLORACIÓN Y UTILIZACIÓN DE LA SEXTA CUERDA AFINADA A 432 HZ: ANÁLISIS Y APLICACIÓN

3.1. ANÁLISIS Y APLICACIÓN SOBRE LA 6ª CUERDA AL AIRE EN FRECUENCIA DE 432 HZ

En el transcurso de la historia se utilizaron varios sistemas de afinación musical para determinar la frecuencia relativa de las notas de una escala, con la intención de fijar la altura absoluta de la misma. Sin embargo, antes de que, en 1955, la organización de estandarización fijara la frecuencia de 440 Hz, existía LA de 432 Hz, la cual ha generado polémicas de diversos tipos, ya que el cambio de afinación fue generado por un ministro nazi llamado Joseph Goebbels en 1939, quien creó un decreto universal en el que se indujo a todos los músicos del mundo a afinar el LA musical a 440 Hz.

A pesar de que muchos músicos franceses, apoyados por el conservatorio de París, se opusieron mediante un referéndum para preservar el LA afinado en 432 Hz; esto fue en vano y el propósito del ministro finalmente se llevó a cabo (Southern, 2006).

Algunos documentos de historia musical aseguran que la afinación de 432 Hz unifica las propiedades de la luz, tiempo, espacio, materia, gravedad y el magnetismo con la biología, el código del ADN y la conciencia. Además, recalcan que la afinación natural a 432 Hz tiene efectos profundos en la consciencia y también en el nivel celular de nuestro cuerpo (Collins, 2002).

Debido a esto y muchas más teorías que los músicos han establecido sobre tal afinación, las críticas siguen siendo fundamentadas bajo teorías del universo y la naturaleza, recalcando que esta afinación es mucho más completa que la de 440 Hz, además de brindar sanación y una perfecta armonía entre la sensación musical y el am-

biente natural. Luego de hacer una síntesis histórica sobre la afinación de 432 Hz, y viendo la influencia del cambio, se desarrolló un análisis de la 6ª cuerda al aire afinada a 432 Hz en MATLAB y Sonic Visualiser, con la obtención de los siguientes resultados: Diagrama comparativo entre los espectros de la 6ª cuerda al aire afinada (a) en 432 Hz y (b) en 440 Hz.

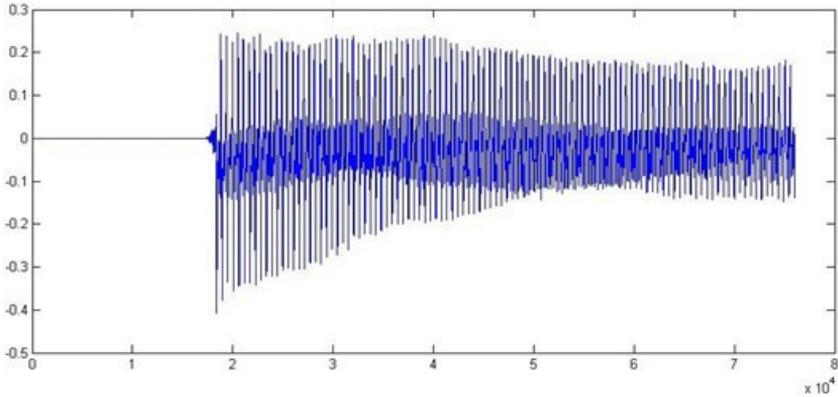


Figura 52. (a) Señal al natural 432 Hz
Fuente: Sonic Visualiser.

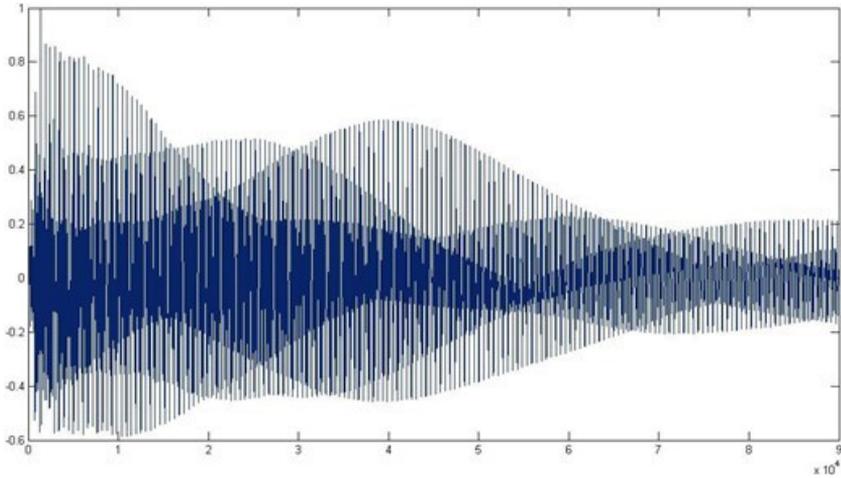


Figura 53. (b) Señal natural 440Hz
Fuente: Sonic Visualiser.

La Figura 54 corresponde a los espectros en una sola cara de las dos frecuencias en (a) 432 Hz y (b) 440 Hz. Asimismo, en la Figura 55 se encuentra el tono puro de las dos afinaciones.

Espectrograma por una sola cara

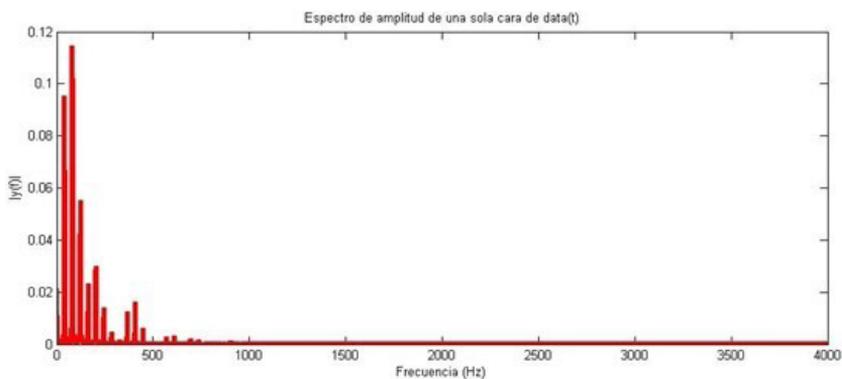


Figura 54. (a) Espectro una sola cara 432Hz
Fuente: Sonic Visualiser.

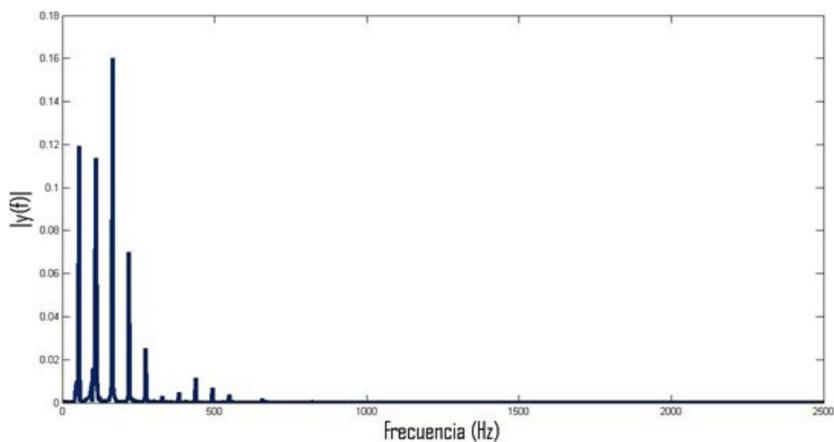


Figura 55. (b) Espectro una sola cara 440Hz
Fuente: Sonic Visualiser.

Como se desarrolló anteriormente con la 6ª cuerda al aire afinada en 440 Hz, se logró también establecer el espectrograma que se muestra a continuación (ver Figura 56):

El segmento correspondiente a la señal de 432 Hz.

Espectrogramas tono puro 6ª cuerda al aire

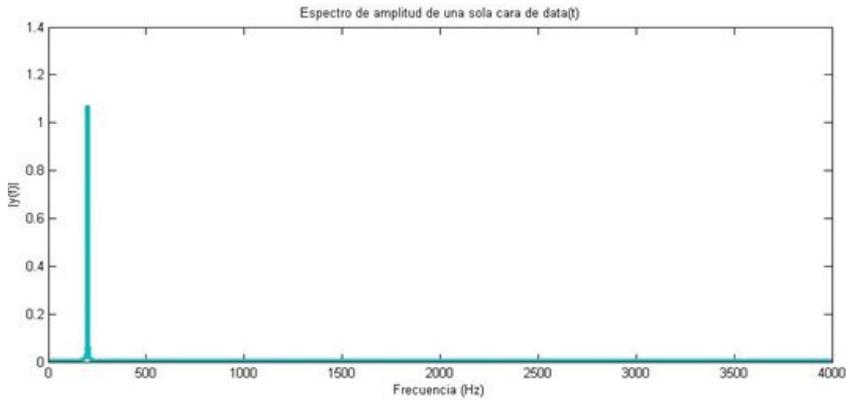


Figura 56. (a) Tono puro 432 Hz
Fuente: MATLAB.

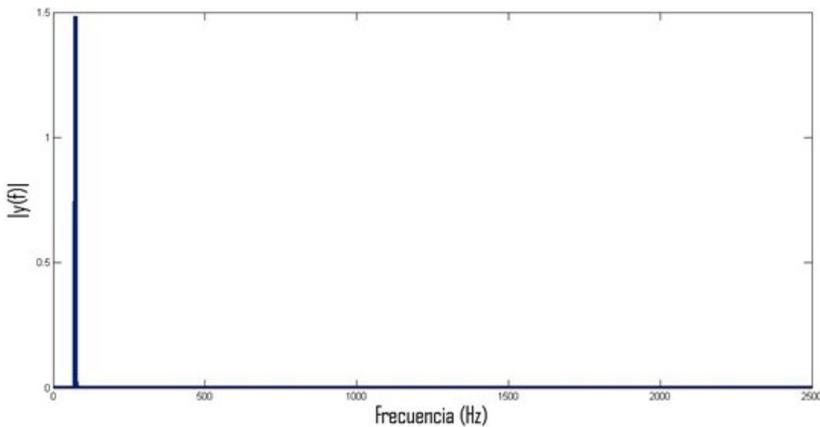


Figura 57. (b) Tono puro 440Hz
Fuente: Sonic Visualiser.

Espectrogramas 432 Hz 6ª cuerda al aire

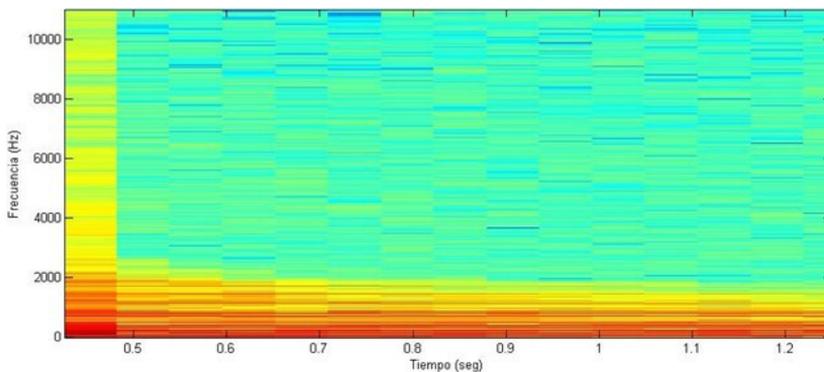


Figura 58. (a) Señal natural
Fuente: MATLAB.

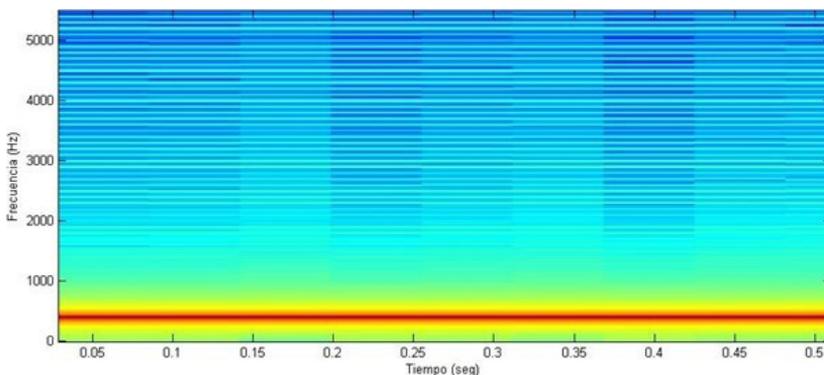


Figura 59. (b) Filtro FFT
Fuente: MATLAB.

Adicionalmente, se realizó el estudio en Sonic Visualiser de la señal con el logro de los siguientes resultados:

- Frecuencia fundamental E2 (Mi2).
- Primer armónico E3 (Mi3)
- Segundo armónico B3 (Si3)
- Tercer armónico E4 (Mi4)

- Cuarto armónico G⁴ (Sol⁴)
- Quinto armónico B⁴ (Si⁴).

Espectrograma 432 Hz, 6^a cuerda al aire en Sonic Visualiser

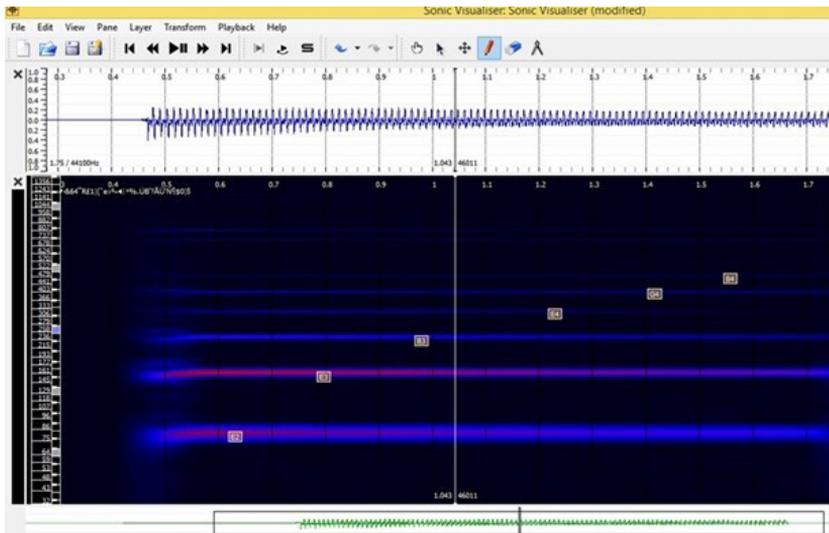


Figura 60. Espectrograma Sonic Visualiser

Fuente: elaboración propia.

ANEXOS RECURSOS Y DETALLES ADICIONALES

El capítulo de anexos se estableció con el fin de indicar cuáles fueron los códigos que permitieron el desarrollo del análisis en MATLAB. El primer código corresponde a los espectros, en el cual se logró graficar cada uno de los espectros de las señales capturadas mediante la función senoidal `[y, fs] = wavread('6TAss432.wav')`.

En el segundo código se logró establecer una función que permitía graficar los espectrogramas de las señales, en los cuales se visualizaban cada una de las frecuencias naturales y fundamentales.

Por último, se generó el código que realizaba el filtro de la señal. Este se estableció mediante la aplicación de la transformada rápida de Fourier.

a. Códigos en MATLAB que permitieron desarrollar el análisis:

```
[y fs]=wavread('6TAss432.wav'); Y ES LA FUNCIÓN SE-  
NOIDAL sound (y,fs) fs frecuencia del muestreo  
figure (1) plot(y)  
%Ahora graficamos la frecuencia del sonido respecto al tiempo  
de la % 4ta cuerda al aire  
Fs=fs/2  
% este paso es necesario para normalizar la frecuencia de la muestra  
Ahora  
L=length (y)/2  
% Con 30 términos aplicamos la transformada rápida de Fourier  
NFFT=2^nextpow2(L); Ejecutamos la transformada rápida de  
Fourier. y=fft(y,NFFT)/L;
```

```
f=Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2+1); Grafica la transformada rápida
figure(2)
plot(f,2*abs(y(1:NFFT/2+1))) xlim([0 4000]) % Posibles
frecuencias.
title ('Espectro de amplitud de una sola cara de data(t)')
xlabel('Frecuencia (Hz)')
ylabel('|y(f)|')
```

Códigos para obtener espectros

```
clear; limpiamos listado de variables usadas clc; limpiamos pantalla
[d,sr] = wavread('6TAss432.wav'); Captura archivo (audio)
```

```
Conventional (linear-frequency) spectrogram plot(313);
spectrogram(d,5000,sr); Gráfica espectro Log-frequency spectrogram
xlabel('Tiempo (seg)'); ylabel('Frecuencia (Hz)');
[Y,MX]=logfsgram(d,5000,sr); Convierte x en logaritmo y grafica
DR = sqrt(MX*(Y.^2)); raiz cuadrada
plot(313); grafica
imagesc(2/N*abs(fft(z))); colorbar Establece la gama de colores
```

Código para obtener el tono puro

```
clear; limpiamos listado de variables usadas clc; limpiamos pantalla
[data fs]=wavread('6TAs432.wav');
leyendo el archivo y su frecuencia de sampleo, donde data es la
función senoidal de la 5Ta cuerda al aire (sin(fr*2*pi*t) wavplay(data,
fs) fs es la frecuencia de muestreo del sonido
5Ta cuerda al aire).
fs=44100; definimos variable frecuencia de sampleo f=400;
definimos variable frecuencia de nuestro sonido
duracion_segundos=2; definimos la duracion de nuestro sonido
```

```

b=f*2*pi;      definimos variable b a utilizar en nuestra función
a=sin(bt+c) a=1; a debe ser 1 para que la función no se distorsione
al reproducirse c=0;
t=[0:1/44100: duracion_segundos]; x=[sin(b*t)];
wavplay(x,fs); reproducir el sonido
    para hacer un gráfico de la onda de sonido
sub_t=(1:100); tomamos los 100 primeros puntos del vector t
sub_x=x(1:100); tomamos los 100 primeros puntos del vector x
stem(sub_t,sub_x); graficamos
wavwrite(x,fs,'Tass432.wav'); guardamos el sonido en .wav

```

Código para obtener la transformada inversa de la señal

```

    aplicamos la transformada rápida de Fourier NFFT=2^nex-
tpow2(L)*100
y1=fft(y,NFFT);

se toma la y4=sen(x)/x para empezar a suavizar x = -1000:0.01:1000;
k=100;
y4 = 100*sin(k*x)/(k*x);$

y2=filter(y4,1,y1);
se hace la convolución entre y1 y y4 la original y la que se va a
suavizar y2=conv(y1,y4);
    aplicamos la transformada inversa rápida de Fourier y2=iff-
t(y2,NFFT);□

```


CONCLUSIONES

El objetivo principal de este trabajo fue analizar la Serie de Fourier, enfatizando en su aplicación en el sonido, para que de esta forma se lograra establecer un acercamiento con la onda senoidal y posteriormente eliminar sus armónicos o filtrar el sonido mediante su transformada rápida, obteniendo así el tono puro.

A modo de repaso de la problemática que se planteó inicialmente para la investigación, que se enfocaba en dar solución al cuestionamiento de cómo la serie de Fourier permitía la obtención del tono puro en un sonido o señal acústica, en las cuerdas de la guitarra (4ª, 5ª y 6ª al aire), se generó inicialmente el capítulo de preliminares. En su primera parte se realizó una síntesis de conceptos fundamentales sobre acústica, y en la segunda parte se abordó la teoría de Fourier y sus transformadas, logrando así comprender el manejo del procesamiento de señales.

Fourier, según Katznelson (1976), demostró que existían diversas aplicaciones en el sonido, por lo que se propuso analizar la aplicación de esta serie para la eliminación de armónicos musicales. Se basó en los principios de creación de filtros, es decir, un dispositivo que permitiera discriminar en su señal de salida todas aquellas frecuencias de la señal de entrada que difieran de la principal. En otras palabras, se buscó eliminar las frecuencias correspondientes a los armónicos y obtener el tono puro. Esto se logró mediante la creación del dispositivo, el cual fue desarrollado en el software matemático MATLAB.

Además de realizar el estudio en el software matemático MATLAB, se observó la generación de armónicos en las cuerdas de la guitarra (4ª, 5ª, 6ª) a través del software musical Sonic Visualiser, para establecer las correspondientes comparaciones y se realizaron estudios adicionales. En este, se estudió la 6ª cuerda al aire en la afinación de

432Hz y 440Hz. A través del análisis realizado se encontraron algunas diferencias entre 440 Hz y 432 Hz.

Es importante recalcar el valor bibliográfico que se ha obtenido mediante la realización de este trabajo, ya que se ha podido generar referencias sobre aplicaciones de la teoría de Fourier en las ramas matemática, musical y médica, que contribuye a futuros trabajos relacionados con el análisis planteado.

Finalmente, se destaca la importancia de llevar a cabo este tipo de estudios, ya que generan nuevos campos de investigación en los que la aplicación de las matemáticas se enfoca en otras ramas y facilita establecer la relación que existe entre la Música y las Matemáticas, abordando aspectos estéticos, composición musical y creación de un lenguaje preciso para la Musicología y la Música, entre otros. Además, se señala que la acústica, que utiliza las Matemáticas, es parte de la Física y la Música.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agulló, J. (1989). *Acústica musical*. Prensa Científica SA.
- Arthur, J. (2000). Harmonic analysis and group representations. *Notices Amer. Math. Soc.*
- Boix, J. (2012). *Acústica y audiometría*. <https://books.google.com.co/books/about/Ac>
- Domingo, R. (2010). *Acústica medioambiental*. Editorial Club Universitario.
- Oxford. (2008). *Diccionario enciclopédico de la música*. Oxford. <https://drive.google.com/file/d/0B5Rt98J40VFiODFjNzdlOGMtMDI-1OC00MjVILTkzOWItM2RkYjUwYjQxYTRh/view?hl=en>
- The Well-Tempered Computer. (s.f.). Ancho de banda. <http://www.thewelltemperedcomputer.com>
- The Well-Tempered Computer. (s.f.). Curvas de Fletcher. <http://www.thewelltemperedcomputer.com>
- Cajón de Ciencias. (s.f.). El oído humano y sus partes. <http://www.cajondeciencias.com>
- Cajón de Ciencias. (s.f.). El oído. <http://www.cajondeciencias.com>
- Collins, et ál. (2022). Credential Inflation and the Future of Universities. In: Brint, S.G., Ed., *The Future of the City of Intellect: The Changing American University* (pp. 23-46). Stanford University Press,
- Katznelson, Y. (1976). *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc.
- Kreyszig, E. (2013). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Editorial Limusa.
- Marion, J. (2003). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Editorial Revert.

- Merino, J. (2006). *Las vibraciones de la música*. Club Universitario.
- Moser, M. (2009). *Ingeniería Acústica*. Editorial Springer.
- Rodríguez, A. (2014). Armónicos reconocibles en do. <http://www.teoria.com/es/referencia/a/armonicos.php>
- Rodríguez, A. (2014). Anchos de banda. <http://www.teoria.com/es/referencia/a/armonicos.php>
- Soposhkov, M. (1983). *Electroacústica*. Editorial Revert.
- Shakarchi. (2003). Fourier analysis. Ann. Phys. (NY) 251 363-271, Volume 1 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press
- Terras, A. (1989). *Fourier analysis on finite groups and applications*. Editorial London Mathematical Society Student Texts.
- Tipler, M. (1989). *Física para la ciencia y la tecnología*. Editorial Revert.
- Walker, J. (1996). Fast Fourier transforms, Studies in Advanced Mathematics. CRC Press.
- Zwicker, E. & Fastl, H. (1990). *Psychoacoustics: Facts and Models*. Editorial Springer.

*Aplicación de la serie de Fourier
en la eliminación de armónicos musicales*

para obtener un tono puro

se editó en fuentes Adobe Garamond Pro, Consolas
y Unbounded,
el 30 de julio de 2024

ISBN: 978-628-7621-70-1



9 786287 621701

 **Editorial**
UCundinamarca

 **UDEC**
UNIVERSIDAD DE
CUNDINAMARCA