Universidad de Cundinamarca

Repositorio CTeI

Ciencias Administrativas, Económicas y Contables

Libros

12-12-2022

Matemáticas Financieras Aplicadas

Odair Triana Calderón
Universidad de Cundinamarca, odair@ucundinamarca.edu.co

Follow this and additional works at: https://repositorioctei.ucundinamarca.edu.co/administrativas

Part of the Other Applied Mathematics Commons, and the Other Education Commons

Recommended Citation

Triana Calderón, Odair, "Matemáticas Financieras Aplicadas" (2022). *Ciencias Administrativas, Económicas y Contables*. 13.
https://repositorioctei.ucundinamarca.edu.co/administrativas/13

This Book is brought to you for free and open access by the Libros at Repositorio CTeI. It has been accepted for inclusion in Ciencias Administrativas, Económicas y Contables by an authorized administrator of Repositorio CTeI. For more information, please contact editorial@ucundinamarca.edu.co.

MATEMÁTICAS FINANCIERAS APLICADAS

Odair Triana Calderón

UDEC
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

Facultad de Ciencias Administrativas, Económicas y Contables

30 AÑOS

MATEMÁTICAS FINANCIERAS APLICADAS

Odair Triana Calderón

©Autor
Odair Triana Calderón

©Dirección Editorial
Olga Marina García Norato

© Universidad de Cundinamarca, 2022

Universidad de Cundinamarca
Fusagasugá, Colombia
Diagonal 18 No. 20-29
Teléfono: (+571) 828 1483
editorial@ucundinamarca.edu.co
https://www.ucundinamarca.edu.co

Corrección de estilo:
Wilson Fernando Mendoza Rivera
Portada:
Javier Alexander Moreno Jiménez
Diagramación:
Franz Sebastian González

Hecho el depósito que establece la ley

ISBN: 978-958-5195-93-6
ISBNe: 978-958-5195-94-3

Primera Edición, 2022

Esta obra tiene una versión de acceso abierto disponible en el Repositorio Institucional de la Universidad de Cundinamarca:
https://repositorio.ucundinamarca.edu.co

DOI:

Universidad de Cundinamarca
Vigilada MinEducación
Reconocimiento personería jurídica:
Resolución No. 19530, de diciembre 30 de 1992

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin la autorización expresa del titular de los derechos.

Contenido

Acerca del Autor 10
Dedicatoria 11
Agradecimientos 11
Introducción 12
Glosario 15
Diagrama de caja 19

1. EXCEL PARA MODELOS FINANCIEROS 21
1.1 OBJETIVO 22
1.2 FORMATO DE CELDA 22
1.3 FUNCIONES 24
1.4 BUSCAR OBJETIVO 28
1.5 SOLVER 30
1.6 MACROS 32
1.7 FUNCIONES FINANCIERAS 35

2. INTERÉS SIMPLE 37
2.1 OBJETIVO 38
2.2 CARACTERÍSTICAS DEL INTERÉS SIMPLE 38
2.3 FÓRMULA GENERAL 39
2.4 MONTO O VALOR FUTURO 40
2.5 CAPITAL O VALOR PRESENTE 44
2.6 TASA DE INTERÉS 47
2.7 CÁLCULO DEL PLAZO 50
2.8 CALCULAR EL INTERÉS 53

2.9 DESCUENTO SIMPLE 56
2.10 VALOR POR PAGAR 56
2.11 DESCUENTO 58
2.12 CÁLCULO DE LA TASA DE DESCUENTO 59
2.13 CÁLCULO DEL VALOR DE ADEUDADO 60
2.14 DETERMINAR EL TIEMPO 62
2.15 ECUACIONES DE VALOR 63
2.16 APLICACIÓN EN EL SECTOR REAL 65
PROBLEMAS 69

3. INTERÉS COMPUESTO 71
3.1 OBJETIVO 72
3.2 CARACTERÍSTICAS DEL INTERÉS COMPUESTO 72
3.3 VARIABLES PARA TENER EN CUENTA 72
3.4 FÓRMULA GENERAL 73
3.5 VALOR FUTURO 74
3.6 EXCEL Fx VF 76
3.7 VALOR PRESENTE 81
3.8 EXCEL Fx VA 82
3.9 TIEMPO O PLAZO 86
3.10 EXCEL Fx NPER 87
3.11 TASA DE INTERÉS 90
3.12 EXCEL Fx TASA 92
PROBLEMAS 94

4. TASAS DE INTERÉS 97
4.1 OBJETIVO 98
4.2 TASAS DE INTERÉS 98
4.3 TASAS PERIÓDICAS 99
4.4 TASAS NOMINALES 100

4.5 TASAS EFECTIVAS 101
4.6 TASAS EQUIVALENTES 104
4.7 CÁLCULO DE UNA TASA PERIÓDICA 107
4.8 CÁLCULO DE UNA TASA NOMINAL 109
4.9 TASA NOMINAL EN EXCEL 110
4.10 CÁLCULO DE UNA TASA EFECTIVA 113
4.11 TASA EFECTIVA EN EXCEL 114
4.12 TASAS COMBINADAS 116
4.13 INFLACIÓN 119
PROBLEMAS 122

5. ANUALIDADES 125
5.1 OBJETIVO 126
5.2 DEFINICIÓN 126
5.3 ANUALIDADES ORDINARIAS O VENCIDAS 128
5.4 ANUALIDADES VENCIDAS Fx EXCEL 138
5.5 ANUALIDADES ANTICIPADAS 148
5.6 ANUALIDADES ANTICIPADAS Fx DE EXCEL 155
PROBLEMAS 167
5.7 ANUALIDADES DIFERIDAS 169
5.8 ANUALIDADES PERPETUAS 175
PROBLEMAS 183

6. LEASING 185
6.1 OBJETIVO 186
6.2 DEFINICIÓN 186
6.3 TIPOS DE LEASING 186
6.4 VENTAJAS GENERALES 187
6.5 DESVENTAJAS 187
6.6 VARIABLES 188

6.7 LEASING OPERATIVO 188
6.8 LEASING OPERATIVO EN EXCEL 190
6.9 LEASING FINANCIERO 193
6.10 LEASING FINANCIERO EN EXCEL 196
6.11 LEASING HABITACIONAL 200
PROBLEMAS 209

7. GRADIENTES 211
7.1 DEFINICIÓN 212
7.2 CARACTERÍSTICAS DE UN GRADIENTE 213
7.3 GRADIENTE LINEAL (Creciente) 213
7.4 GRADIENTE LINEAL (Decreciente) 232
7.5 GRADIENTE GEOMÉTRICO (Creciente) 240
7.6 GRADIENTE GEOMÉTRICO (Decreciente) 249
PROBLEMAS 255

8. SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN 257
8.1 DEFINICIÓN 258
8.2 SISTEMA DE AMORTIZACIÓN 258
8.3 ÚNICO PAGO AL FINAL DEL PLAZO 258
8.4 SISTEMA DE AMORTIZACIÓN CUOTA FIJA 262
8.5 SISTEMA CUOTA VARIABLE - AMORTIZACIÓN CONSTANTE 274
8.6 SISTEMA CUOTA FIJA CON PERIODO DE GRACIA EN EL PAGO 281
PROBLEMAS 288

9. EVALUACIÓN DE PROYECTOS 289
9.1 FLUJO DE CAJA LIBRE 290
9.2 TASA DE DESCUENTO (TD) 293

9.3 VALOR PRESENTE NETO (VPN) 297
9.4 TASA INTERNA DE RETORNO (TIR) 309
9.5 PERIODO DE RECUPERACIÓN DE LA INVERSIÓN (PRI) 326
PROBLEMAS 330

Bibliografía 331
Lista de tablas 333
Lista de gráficas 336
Lista de imágenes 339

Acerca del Autor

Odair Triana Calderón,
nacido en San Juan de Rioseco Cundinamarca.

Administrador de Empresas
(Universidad de Cundinamarca)

Especialista en Gerencia Financiera
(Fundación Universitaria del Área Andina)

Especialista en Gerencia para el Desarrollo Organizacional
(Universidad de Cundinamarca)

Magíster en Diseño, Gestión y Dirección de Proyectos
(Universidad Internacional Iberoamericana)

Magíster en Finanzas
(Universidad Autónoma del Caribe)

Docente Universitario por más de diez (10) años en el área de finanzas y proyectos en diferentes instituciones tales como:
Universidad de Cundinamarca
Escuela Superior de Administración Pública - ESAP
Corporación Universitaria Minuto de Dios
Fundación Universitaria San Martín
Fundación Universitaria Panamericana

Autor de:
Matemáticas Financieras Básicas Aplicadas.

Dedicatoria

A Dios, el dador de la vida, que sin Él nada de lo que soy sería posible serlo, día a día soy bendecido con cada logro obtenido, por darme la bendición de formarme académicamente en Administración y Finanzas, privilegio que pocos tenemos, de lo cual me siento muy agradecido y afortunado.

A mi familia (Lili y Yeyo), a mi padre, mi madre y hermanos, familiares, amigos, estudiantes y personas de las cuales recibí su mensaje aliento y felicitación en mi anterior publicación.

Agradecimientos

Mi total sentido de gratitud con la Universidad de Cundinamarca, quien desde su administración generó los medios para que este proyecto profesional y de vida sea una realidad. Adicionalmente, a mis compañeros de Universidad tanto de estudio en Fusagasugá, a quienes recuerdo gratamente cuando estudiábamos en los salones de la U para los parciales de los profes Villamil y Reales, así también, a los compañeros de labor en Facatativá, los cuales siempre estuvieron prestos a contribuir con mis ideales académicos, pero no solo eso, también aportaron en mi formación personal y profesional con sus sugerencias y experiencias vividas en cada etapa. Finalmente, a su señoría el Dr. Alfonso Santos Montero a quien le agradezco su apoyo para mi formación profesional e inicio de mi experiencia laboral.

Introducción

Las ciencias exactas a lo largo de la historia han buscado de una u otra forma dar respuesta a los interrogantes comunes del ser humano y el caso de las finanzas no es ajeno, por ello, las matemáticas financieras tienen el propósito de dar solución a los casos donde de una u otra forma interviene el dinero como medio de pago en una transacción económica o, simplemente, busca calcular el lucro que obtiene el dueño del capital, que para este fin es el denominado interés. (Meza, 2017)

Este texto es producto de una investigación formal de tipo personal, el cual pretende ayudar a dar soluciones a postulados o problemas financieros, tales como inversión y financiación, para lo cual se desarrollan los conceptos del valor del dinero en el tiempo, variables, fórmulas, procedimientos, flujos de caja y respuestas a temas como interés simple, interés compuesto, tasas de interés, anualidades, gradientes, sistemas de amortización y evaluación de proyectos. (Triana, 2021)

Teniendo en cuenta que, a partir del capítulo 3, cada tema es desarrollado en hojas de cálculo, en consecuencia, el capítulo 1 hace una contextualización en las herramientas a utilizar de Microsoft Excel, relacionado con formatos de celdas, tablas, funciones, solver y macros, con el fin, de fortalecer las competencias blandas de los lectores.

En el capítulo de interés simple se encontrará cómo desde una tabla se estructura una fórmula que permite determinar el monto o valor futuro, los intereses, el capital invertido y el tiempo que pudo estar invertido o financiado, y finalmente su aplicación en el sistema financiero.

Por su parte, el interés compuesto o comúnmente denominado valor futuro, muestra un comportamiento en términos de variables como el interés simple; sin embargo, este contiene un sistema diferente en la composición de los intereses ya que se habla de capitalización de estos, es decir, que pasan a hacer parte del capital principal. Este sistema es fundamental para las tasas de interés, anualidades y demás.

Las tasas de interés hacen parte de este libro, dado que permiten establecer en términos de valores relativos, el nivel de rentabilidad de un capital; así mismo, definen indicadores de crecimiento o descuento en el precio de los artículos o simplemente de un capital, en los que se abarcan temas como tasas de interés efectivo, nominal y periódico, y un indicador económico como la inflación, que determina el crecimiento o la disminución de precios de una economía.

En cuanto a los pagos variables y uniformes, los capítulos de anualidades y gradientes permiten dar respuesta a casos de inversión y financiación, para lo cual las fórmulas y aplicaciones en Excel serán de gran ayuda en el desarrollo temático con desarrollo a sistemas de crédito tradicional. Se incorpora un tema de vital importancia como el leasing financiero, en el cual se da aplicación a la adquisición de viviendas en Colombia, a través del leasing habitacional

Los sistemas de amortización, como resultado del comportamiento de los asuntos ya abordados permitirán al lector identificar el comportamiento que tiene una inversión o financiación en la generación de intereses y el proceder de cada pago o cuota, en el caso de los préstamos.

Finalmente, el capítulo 9 denominado evaluación de proyectos se abarca cuatro (4) tópicos de importancia, como lo son: la Tasa de Descuento (TD),

el Valor Presente Neto (VPN), la Tasa Interna de Retorno (TIR) y Periodo de Recuperación de la Inversión (PRI), que ayudarán al inversionista a evaluar su decisión de invertir o no, teniendo en cuenta los indicadores.

Glosario

Para una mejor compresión del documento en términos financieros es ideal tener en cuenta los siguientes términos.

Ahorro: Desde el punto de vista de la economía se define como aquella cantidad del dinero que no se consume y que está disponible para ser colocada en pro de una actividad económica (Samuelson, 2010).

Amortización: Una forma de acabar o, como traduce su original, de matar una deuda. (Díaz & Aguilera, 2008)

Anualidad: Nombre que recibe la formación de un pago, la característica de estos ingresos o egresos es su uniformidad. (Triana, 2021)

Diagrama de Flujo: Gráfica que refleja a través del tiempo, el comportamiento del dinero, donde, las flechas hacia arriba representan ingresos o entradas de dinero y las flechas hacia abajo los egresos o salidas. (Triana, 2021)

Dinero: Medio legal de pago de obligatoria aceptación. (Banco de la República, 2020)

Capital: Se puede definir como la cantidad de dinero que no está comprometida y que una persona destina para ser invertida en una actividad económica o proyecto de inversión. (Baca Urbina, 2016)

Capitalización: Proceso mediante el cual los intereses que se van causando periódicamente se suman al capital anterior. (Meza, 2017)

Flujo de Caja libre (FCL): También llamados Flujos Netos de Efectivo (FNE), resultan de la diferencia entre los ingresos y los egresos, éstos, pueden ser positivos o negativos.

Gradiente: Valor absoluto o relativo que tiene un pago en su formación, el cual es de carácter constante y continuo a lo largo del ejercicio financiero; puede ser progresivo o regresivo. (Agudelo, 2019)

Inflación: En una economía de mercado, la inflación se da por el aumento constante de los precios de bienes y servicios a través del tiempo. (Banco de la República, 2020)

Interés: Dado que el dinero es considerado como un bien que se puede comprar y vender (Mercado Forex), el uso de un dinero que no es nuestro implica pagar por su uso, teniendo en cuenta variables como el tiempo, la tasa de interés y el dinero.

Interés simple: Cantidad de dinero pagado sobre el capital primitivo o inicial, el cual permanece invariable. En consecuencia, el interés obtenido en cada intervalo unitario de tiempo es el mismo, es decir, la retribución económica causada y pagada **no** es reinvertida, por cuanto el monto del interés es calculado sobre la misma base. (Meza, 2017)

Interés compuesto: Llamado también interés sobre interés. Es aquel que al cabo de un tiempo toma los intereses ganados y estos llegan a hacer parte del capital inicial, periodo tras periodo; en otras palabras, los intereses ganados en cada periodo se capitalizan, es decir, se convierten en capital. (Meza, 2017)

Inversión: Desde lo económico es sinónimo de ahorro destinado a la producción. Cantidad de dinero que se utiliza para financiar una actividad económica. (Baca Urbina, 2016)

Periodo de gracia: Tiempo otorgado por las entidades financieras, en el cual los tomadores no realizan pago de intereses, abonos a capital o pagos de alícuotas de su obligación. (Díaz, 2013)

Pago: Cantidad de dinero que interviene en un hecho económico, el cual puede ser por concepto de ingreso o egreso. En la mayoría de las veces este valor monetario es un resultado compuesto por distintas variables de formación. (Meza, 2017)

Plazo: Tiempo que estará invertido o financiado un capital. (Triana, 2021)

Tabla de amortización: Descripción del comportamiento del capital, los intereses generados y saldo de la inversión; en el caso de una financiación se adicionará el pago o la cuota. (Álvarez, 2005)

Tasa de interés: Valor porcentual o relativo que se le aplicará a un capital para determinar su interés considerando el tiempo. (Triana, 2021)

Tasa Interna de Retorno (TIR): Tasa resultado de tomar el Valor Presente Neto e igualarlo a cero. (Meza, 2017)

Tasa Interna de Retorno Modificada (TIRM): Tasa resultado de tomar el Valor Presente Neto e igualarlo a cero, teniendo en cuenta la reinversión de los beneficios en cada periodo y posibles FNE negativos.

Unidad Monetaria (um): En relación con los procesos mercantiles donde interviene el dinero, es preciso generalizar en términos de divisas y utilizar la mención UM, con esto, no se hace especificación a un tipo moneda en particular. (Triana, 2021)

Valor del dinero en el tiempo: Para una mejor comprensión podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Es lo mismo recibir 100 um hoy que recibirlas dentro de un año? Si la respuesta es no, esto se da por el valor del dinero en el tiempo, que puede estar afectado por la inflación y demás variables. (Kozikowski, 2007)

Valor Presente Neto (VPN): Indicador de evaluación financiera, el cual determina la diferencia entre la inversión inicial de un proyecto, frente a los beneficios actualizados futuros. (Triana, 2021)

Diagrama de caja

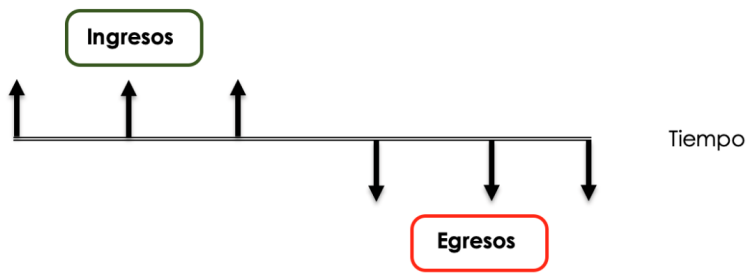
Los diagramas de caja o también llamados flujos de caja son la representación gráfica de los ingresos y egresos reflejados en una línea de tiempo. Para los financieros, éstos representan información fundamental de un hecho o problema en el cual interviene el dinero.

Por lo anterior, sería válido mencionar que, un diagrama de caja representa para un financiero, lo que es un plano para un ingeniero o un mapa para quien transita por un lugar desconocido.

↑ Los ingresos son las entradas de dinero que una persona, empresa, gobierno o en el caso particular de un proyecto espera percibir por la venta de un bien o servicio o por otros ingresos que contablemente se conocen como un ingreso no operacional, dicho de otra manera, es aquel ingreso que su origen no proviene de la actividad principal descrita en un objeto social. En el diagrama se representan con flechas hacia arriba en la línea de tiempo.

↓ Por otro lado, se encuentran los egresos o salidas de dinero, los cuales pueden ser por efecto de pago de costos o gastos, como los ingresos, estos también pueden ser operacionales o no operacionales. En el diagrama éstos son representados mediante flechas hacia abajo en la línea de tiempo.

Lo anterior, se verá representado de la siguiente forma:



1. Excel para modelos financieros

"Excel o hoja de cálculo, la herramienta perfecta para las finanzas"

1.1 OBJETIVO

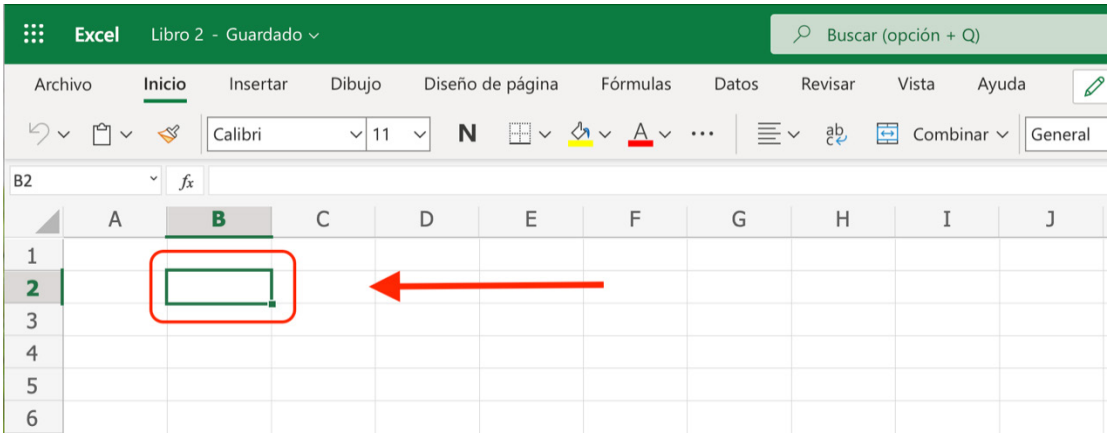
Presentar las bondades que proporciona la herramienta de Microsoft Excel, con el fin de dar uso al mismo en el desarrollo de las temáticas contenidas en el presente documento y, conseguir dar una idea general de la modelación financiera.

1.2 FORMATO DE CELDA

Recibe el nombre de celda, al cruce que existe entre una columna y una fila dentro de una hoja de Excel, en ellas, es posible incorporar valores numéricos, textos o su combinación, es decir, alfanuméricos, dejando claro que no es posible realizar cálculos, cuando el contenido de las celdas son letras y números ingresados manualmente.

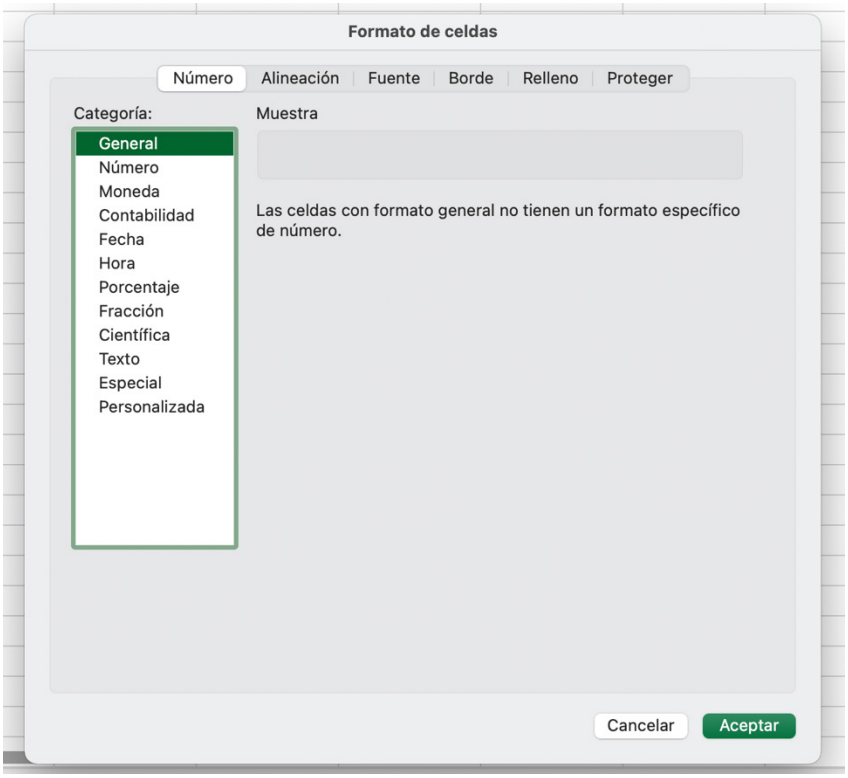
A continuación, se identifica en el Excel la celda B2, la cual recibe su nombre por la intersección existente entre la columna B y la fila 2:

Imagen 1. Celda B2



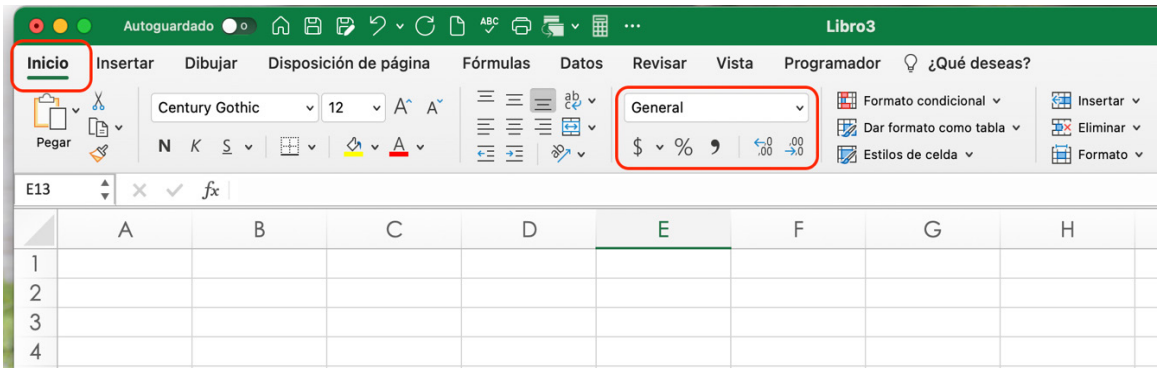
Por lo anterior, es posible darle el formato a la celda, dependiendo del tipo de dato que se desee incorporar. Como ejemplo; se puede hablar de una fecha, valor en dinero, cantidad, porcentaje, decimal etc. Por consiguiente, es necesario antes de ingresar valores, asignar el formato correspondiente, para ello, es posible hacerlo oprimiendo las teclas Control + 1 o dando clic con el botón derecho del mouse y eligiendo formato de celda, donde aparecerá la siguiente ventana:

Imagen 2. Formato de Celda



Para algunos formatos como porcentajes, monedas o número de decimales, estas dimensiones pueden ser adjudicados con tan solo dar un clic en el botón correspondiente, los cuales se ubican en la pestaña inicio de la barra de menú, como se muestra a continuación:

Imagen 3. Formato de Celda 2



Para el diseño, desarrollo y presentación de la información financiera en Excel, es importante antes de iniciar con el ingreso de los datos, dar el formato adecuado de la forma o modo visto, con el fin de obtener mejores y precisos resultados.

1.3 FUNCIONES

Las funciones son la manera más rápida, precisa y sencilla de resolver una fórmula de tipo estadístico, búsqueda o referencia, matemático, financiero y demás. Éstas, vienen incorporadas en el Excel y permiten establecer el resultado en una celda determinada. (Gutiérrez, 2008)

Para incorporar una función en una celda, es preciso tener en cuenta la siguiente estructura:

+ o = nombre(argumento**1**(; o ,) argumento**2**(; o ,) argumento**n** ....)

Como se puede observar, las funciones en Excel están compuestas por tres (3) segmentos:

1 – El signo igual (=) o el de suma (+), este, debe ir al inicio o antecediendo el nombre de la función. Cual de digita estos signos en la hoja de cálculo,

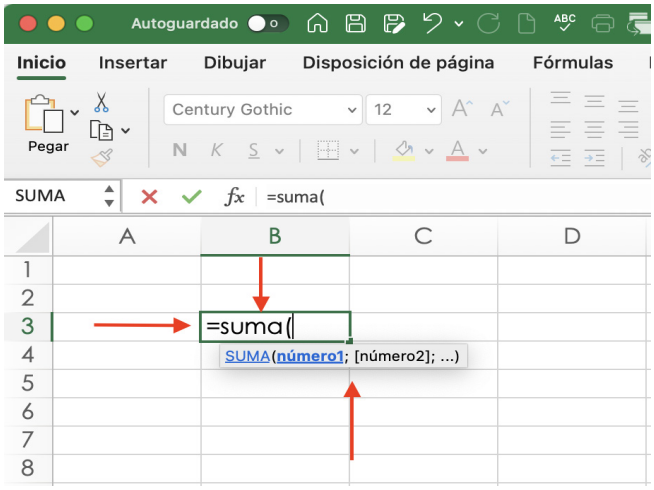
se entiende que se va a formular o insertar una función, con el fin de obtener un resultado.

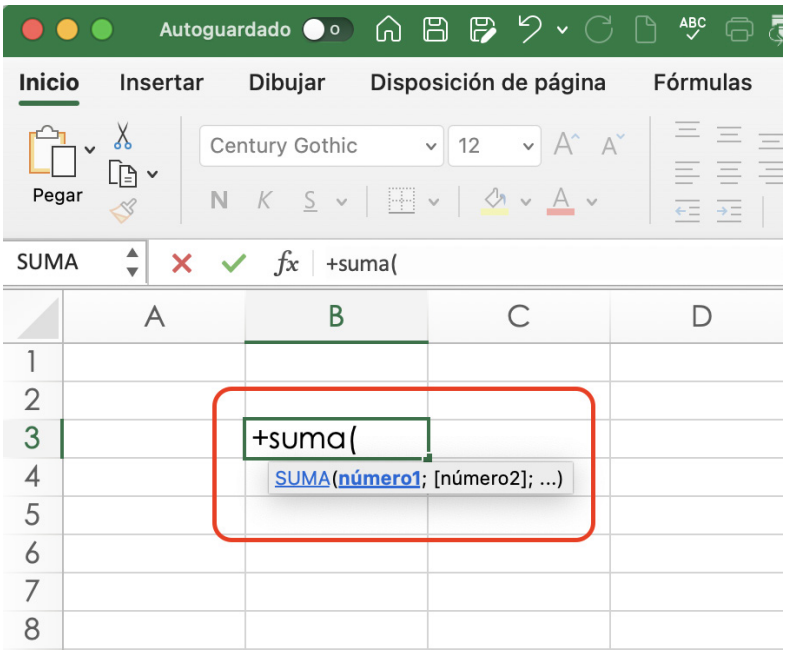
2 – El nombre de la función, contiene una escritura o estructura ya predeterminada la cual no se puede cambiar, es decir, que para que la función realice su proceso es necesario que se escriba como se establece por Excel. A manera de ejemplo; se encuentra la función que establece la fecha actual, la cual tiene como nombre "HOY()". De esta manera aplica para las demás funciones de las categorías ya mencionadas. Importante, que luego de escribir el nombre se abra un paréntesis.

3 – Los argumentos dependerán en su naturaleza y cantidad de la función que se esté por ejecutar, una vez se ha insertado el signo, el nombre y abierto un paréntesis, el Excel guiará de manera predeterminada los argumentos o criterios a insertar, estos, deben estar separados por una como (,) o por punto y coma (;), esto, dependerá de la versión del office (Excel) y se visualizará en la sintaxis de la función.

Lo anterior, se puede visualizar en Excel de la siguiente manera:

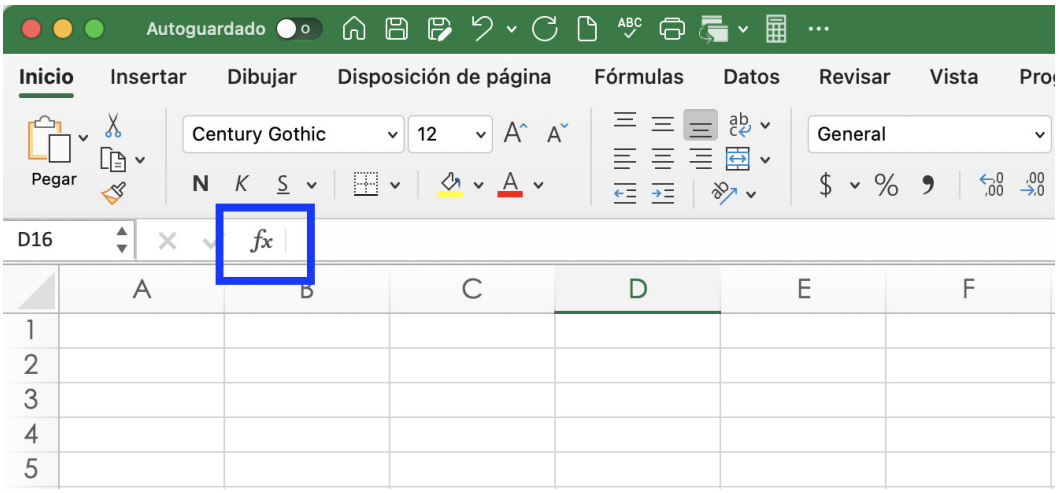
Imagen 4. Estructura de una función





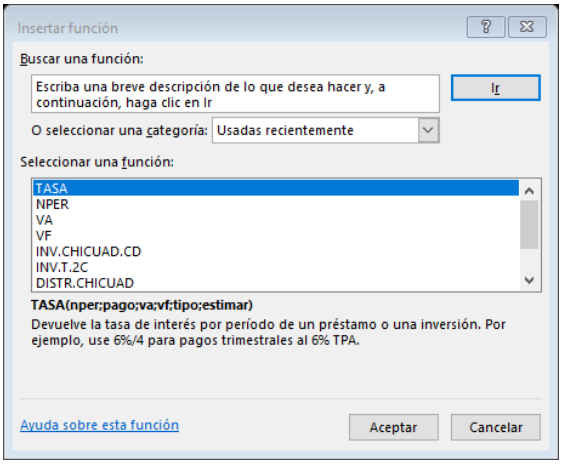
Otra manera de insertar una función en una celda de Excel, es con la utilización del icono ***fx*** ubicado en la barra de fórmulas, la cual desplegará una ventana.

Imagen 5. Insertar Función

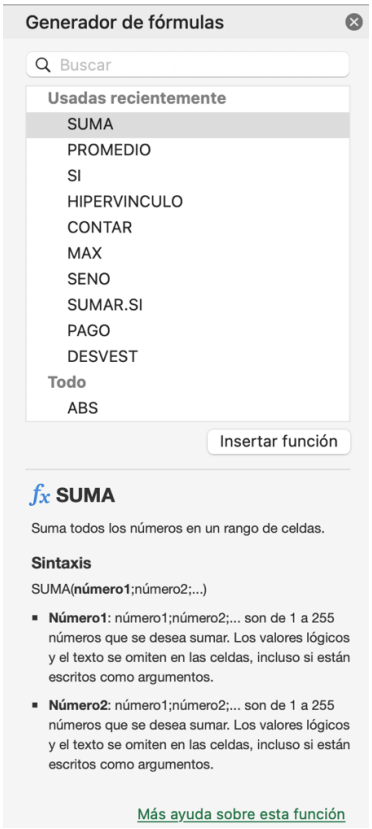


Una vez se dé clip en el icono ***fx*** *se* abrirá una ventana, donde, se debe elegir la categoría de la función a insertar, luego se selecciona la función deseada.

Opción 1



Opción 2



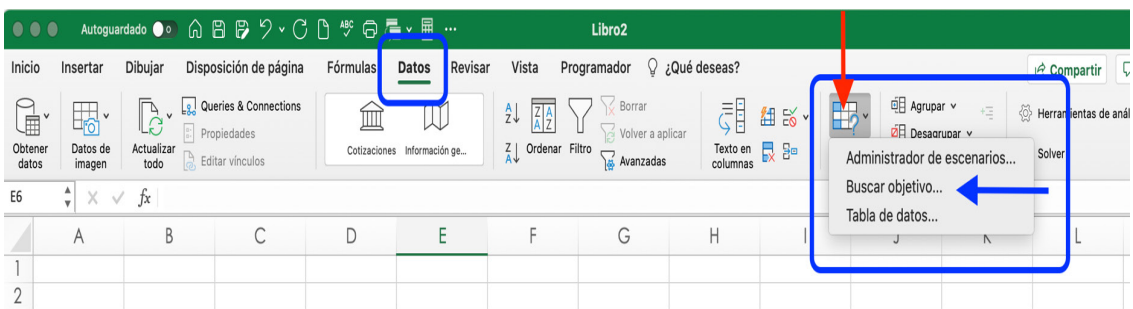
1.4 BUSCAR OBJETIVO

La función buscar objetivo, es una herramienta que contiene el Excel, la cual, teniendo como punto de partida una celda formulada o función, es decir, una celda donde se espera obtener un resultado, este valor, puede ser estimado de acuerdo con las necesidades, mediante la aplicación BO, considerando un cambio de variable.

Dicho en el lenguaje de modelación financiera, la función que cumple la herramienta buscar objetivo es; establecer un valor deseado en el dato de salida, tomando como elementos variables o cambio de un dato de entrada.

Esta herramienta se ubica en pestaña datos de la barra de menú, en la pestaña ***análisis*** y ***SI***

Imagen 6. Buscar Objetivo



La función está compuesta por tres (3) elementos; ***Definir celda, Con el valor*** y ***Para cambiar la celda.***

Definir celda, hace referencia a la celda donde se encuentra la fórmula o el dato de salida.

Con el Valor, hace referencia al resultado o Resultado que se desea obtener en el dato o celda de salida.

Y finalmente, ***Para cambiar la Celda***, corresponde a elegir la celda de un dato de entrada, el cual va a cambiar dependiendo del valor esperado.

Para ejemplificar de forma sencilla, supóngase que tiene una suma de dos elementos la cual da como resultado quince (5 + 10 = 15)

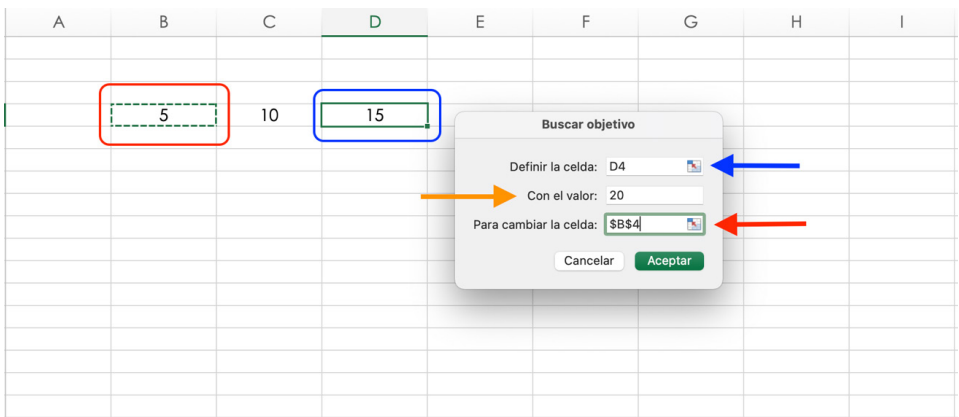
El dato de salida será la celda donde está la fórmula de sumatoria, donde el resultado es quince (15)

Las celdas donde se encuentra el cinco (5) y el diez (10), son elementos de entrada.

Ahora se quiere saber, cuál será el valor del primer sumando (5) para que la suma ya no sea 15, sino que por el contrario sea 20, es decir, que el dato de salida cambie a uno deseado, que para el caso particular sea 20.

Aplicando la herramienta buscar objetivo se verá de la siguiente forma:

Imagen 7. Aplicación buscar objetivo



El resultado será; que el valor de la suma será 20 y el dato de entrada del primer sumando (5), cambiará a 10.

10	10	20

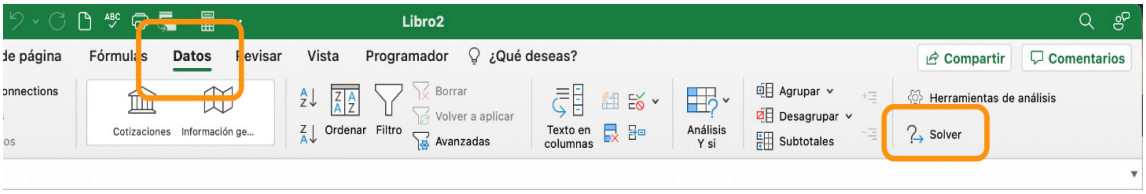
1.5 SOLVER

Solver es una herramienta que contiene Excel, la cual se basa en el modelo matemático de programación lineal, donde se cuenta con una función objetivo, algunas restricciones o condiciones que deben cumplir las variables, con el fin de maximizar o minimizar una actividad.

Solver a igual que buscar objetivo, requiere para su ejecución una celda formulada o dato de salida.

En la hoja de Excel, esta se ubica en la pestaña datos de la barra de menú, opción solver.

Imagen 8. Solver

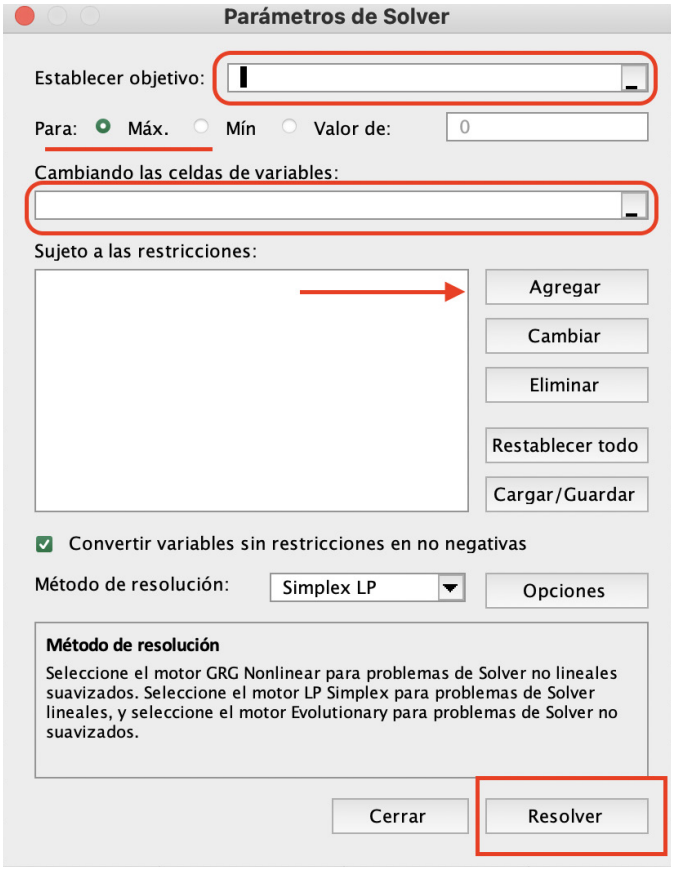


Una vez se tenga el modelo matemático, es decir, la celda de salida formulada, basta con ubicarse en dicha celda, pulsar solver y aparecerá una ventana, la cual tendrá como predeterminada la celda de salida como *establecer objetivo*, luego se debe seleccionar si el modelo busca maximizar

o minimizar el dato de salida, para ello se cuenta con la opción *Max y Min,* luego se seleccionan las celdas o datos de entrada del modelo, éstas, estarán ubicadas en la opción *Combinando las celdas de las variables* y finalmente, se agregan las restricciones del modelo en las opción *Sujeto a las restricciones.*

Una vez se han ingresado los datos necesarios, basta con dar clic en Resolver, y solver solucionará el problema, generando una alternativa que cumpla las restricciones de la parametrización.

Imagen 9. Venta de Solver



1.6 MACROS

Las macros, con una herramienta del Excel, que permite grabar un procedimiento y luego ser ejecutado mediante un botón o combinación de teclas.

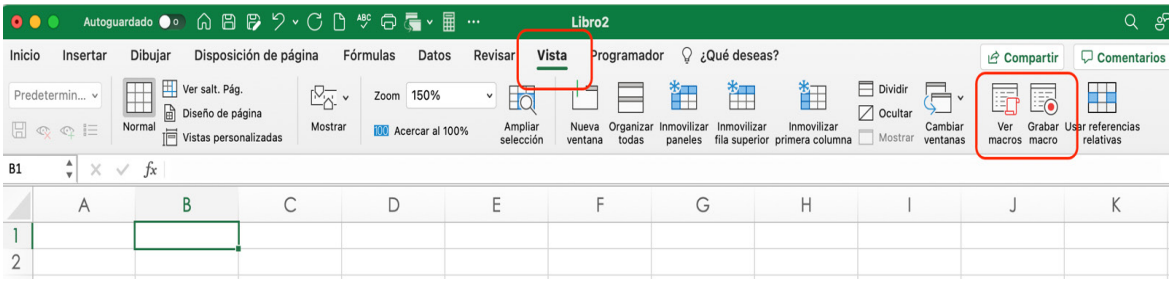
Estas grabaciones o macros se utilizan en los procesos que son muy repetitivos, y buscan reducir tiempo y precisar cálculos en los modelos matemáticos.

Para la utilización de esta herramienta en modelos matemáticos, los expertos en el tema realizan una programación bajo el lenguaje de Visual Basic, sin embargo, no es necesario ser un ingeniero de sistemas experto en programación, ya que el Excel realiza este proceso una vez se cuenta con el inicio de la grabación de la macro.

Esta herramienta se puede ubicar en la pestaña vista de la barra de menú y cuenta con dos (2) opciones; grabar macro o ver macros.

La opción grabar se utiliza cuando no se ha hecho el proceso de grabación y, la opción ver, se lleva a cabo cuando ya existen macros grabadas y se requiere editarlas o eliminarlas.

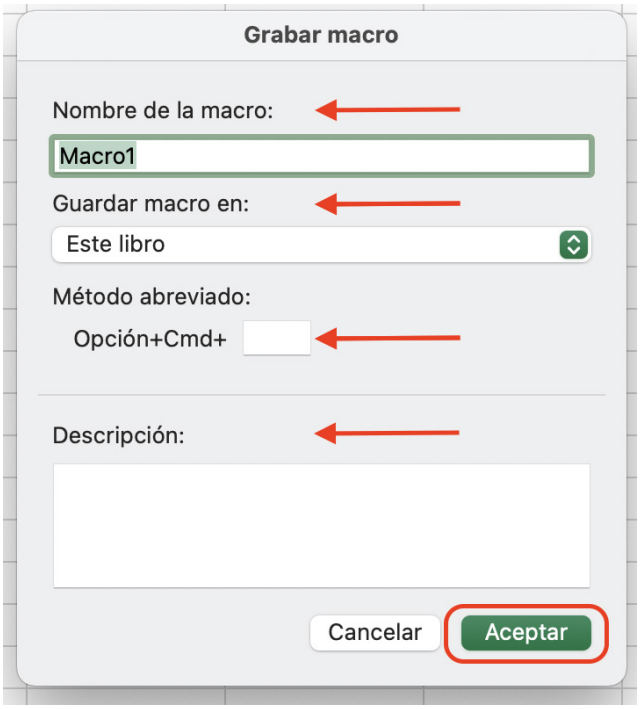
Imagen 10. Macros



Antes de grabar una macro, es importante guardar el archivo de Excel con esa opción. El proceso inicia con abrir un archivo de Excel, oprimir la tecla F12 o ir a guardar como, digitar el nombre y seleccionar la ubicación del documento, en la opción tipo o formato de archivo, seleccionar del listado de alternativas *"libro de Excel habilitado para macros"* y luego guardar.

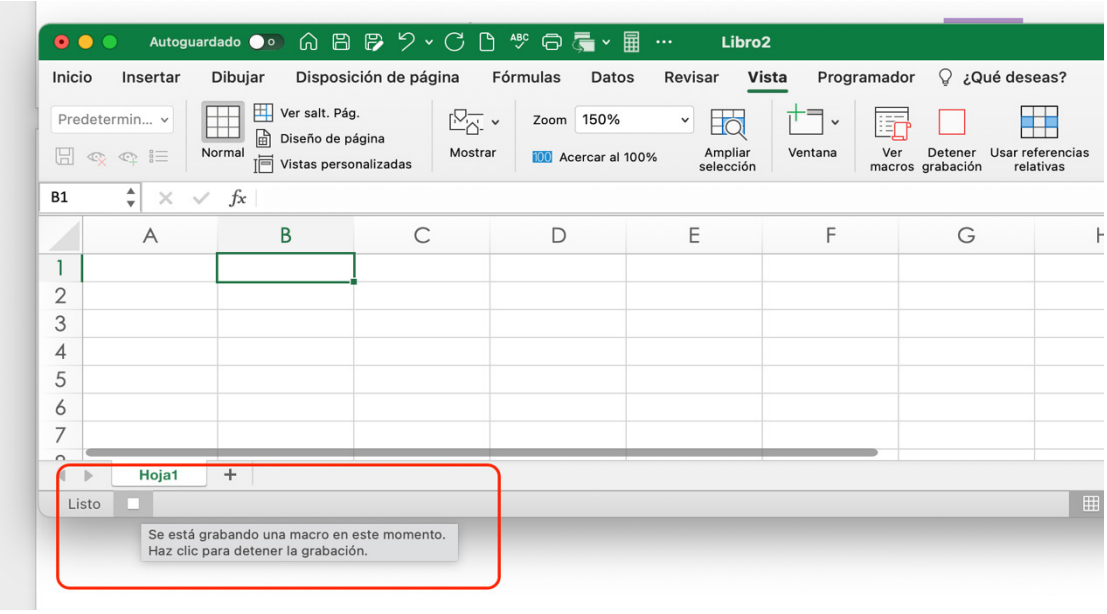
Ya con la anterior parametrización, se podrá realizar el proceso de grabación o macros. Para lo cual solo basta con dar clic en grabar macro, digitar un nombre, seleccionar en *Guardar macro en:* la alternativa en *"Este libro"*, en el *Método abreviado* está la combinación de algunas teclas para su ejecución, sin embargo, el consejo es no hacerlo, finalmente, si cree necesario hacer una descripción del proceso lo puede hacer y luego *Aceptar*.

Imagen 11. Grabar una Macro



Al momento de dar clip en aceptar, en la parte inferior izquierda de la hoja de Excel a parecerá un cuadro que, al ubicar el cursor con el mouse, se informará que actualmente se está grabando una macro, es ahí donde se debe realizar el proceso completo la actividad.

Imagen 12. Inicio Grabación de una Macro



Una vez se ha terminado de grabar el proceso o la actividad puntual, se detiene la grabación dando clic en el cuadro o en la opción detener grabación de la pestaña vista.

Finamente, se selecciona un botón, imagen o celda para asignar la macro y que esta funcione, para ello, se ubica en elemento elegido, se da clic derecho y se selecciona la opción *"Asignar macro"*. Después de ello aparecerá una mano sobre el elemento, lo que indicar que ya se podrá utilizar o ejecutar.

1.7 FUNCIONES FINANCIERAS

A continuación, se presenta un listado de las funciones financieras contenidas en Microsoft Excel y utilizadas en los ejercicios del presente texto:

Tabla 1-1. Funciones Financieras

Nombre	Detalle
INT.EFECTIVO	Devuelve la tasa de interés anual efectiva.
NPER	Devuelve el número de pagos de una inversión, basado en pagos constantes y periódicos y una tasa de interés constante.
PAGO	Calcula el pago de un préstamo basado en pagos y tasa de interés constantes.
PAGOINT	Devuelve el interés pagado por una inversión durante un período determinado, basado en pagos periódicos y constantes y una tasa de interés constante.
PAGOPRIN	Devuelve el pago del capital de una inversión determinada, basado en pagos constantes y periódicos, y una tasa de interés constante.
TASA	Devuelve la tasa de interés por período de un préstamo o una inversión. Por ejemplo, usa 6%4 para pagos trimestrales al 6%TPA.
TASA.NOMINAL	Devuelve la tasa de interés nominal anual.
TIR	Devuelve la tasa interna de retorno de una inversión para una serie de valores en efectivo.
TIRM	Devuelve la tasa interna de retorno para una serie de flujos de efectivo periódicos, considerando costo de la inversión e interés al volver a invertir el efectivo.
VA	Devuelve el valor presente de una inversión: la suma total del valor actual de una serie de pagos futuros.
VF	Devuelve el valor futuro de una inversión basado en pagos periódicos y constantes, y una tasa de interés también constante.
VNA	Devuelve el valor neto presente de una inversión a partir de una tasa de descuento y una serie de pagos futuros (valores negativos) y entradas (valores positivos).

2. Interés simple

"Se define como la cantidad de dinero pagado sobre un capital, el cual permanece invariable a lo largo del tiempo"

2.1 OBJETIVO

Este capítulo busca suministrar herramientas que permitan dar solución a problemas de tipo financiero relacionados con el modelo de interés simple, en busca de mejorar la toma de decisiones en ámbitos profesionales y personales, cuando de invertir un capital se trata.

2.2 CARACTERÍSTICAS DEL INTERÉS SIMPLE

El capital invertido o financiado permanece constante durante la operación, base del cálculo del interés a través del tiempo, sin que se realicen abonos al principal en caso de un crédito.

Concepto: El interés simple es aquel valor calculado para un periodo, donde este permanece constante a lo largo de la obligación, en el caso de una deuda a cancelar en un año con pagos mensuales de 10 um; esto indica que se harán 11 pagos de 10 um por concepto de interés y el último (12) por el valor de la obligación más 10 um de intereses.

Los intereses no son capitalizables, es decir, que al finalizar un periodo estos hagan parte de la deuda inicial o la inversión.

Los intereses son calculados sobre el capital primario o saldo de la obligación.

Variables que intervienen

En el desarrollo de problemas financieros para solucionar a través de interés simple es necesario tener en cuenta las siguientes variables:

- **Capital Inicial o Primario (C):** Este hace referencia al dinero destinado para la inversión o financiación.

- **Capital Final o Monto (M):** Es el valor acumulado, fruto de sumar el capital y los intereses simples generados durante la operación.
- **Tasa de interés, Ratio o Razón (i):** Es la tasa de interés que se aplicará al caso financiero, en los periodos estipulados.
- **Plazo, Tiempo o Periodo (n):** Corresponde al periodo en el cual se llevará a cabo la inversión o financiación.
- **Interés o Renta (I):** Es la cantidad de dinero que se obtiene de la operación.
- **Capitalización (Kp):** Esta es la periodicidad de los pagos o liquidación de los intereses.

2.3 FÓRMULA GENERAL

La fórmula es el resultado de la tabla de amortización en una inversión, en la cual se aplica el concepto de interés simple, que posteriormente se desarrollará detalladamente para una mejor comprensión del tema.

Monto = Capital + Interés $\mathbf{M = C + I}$

Interés = Capital * Tasa * Tiempo $\mathbf{I = cin}$

Factorizando:

Fx Fórmulas

$$\mathbf{M = C + cin} \quad = \quad \mathbf{M = C(1 + in)}$$

A continuación, se desarrollará un caso de inversión, en el cual se refleja los conceptos relacionados con el interés simple, identificando cada variable y aplicación de las fórmulas matemáticas enunciadas en el

pasaje anterior, donde se establece como calcular el interés y el monto dependiendo del caso.

2.4 MONTO O VALOR FUTURO

Ejemplo 1

¿Cuál es el valor final de una inversión de 100.000 um, si se ha obtenido utilidades después de 3 meses a interés simple, rentando al 12% anual?

Para resolver un problema financiero es necesario tener en cuenta el siguiente procedimiento:

1. Leer con atención el problema financiero o caso a resolver.
2. Identificar el problema o la variable a determinar.
3. Ajustar las variables de tiempo y tasa en la misma unidad de medida según el caso.
4. Realizar un diagrama de flujo o flujo de caja.
5. Identificar o despejar la fórmula adecuada.
6. Aplicar o sustituir en la fórmula.
7. Dar una respuesta al interrogante.

Como se mencionó anteriormente, la fórmula general de interés simple es fruto de una tabla de amortización; a continuación, la Tabla 2-1 señala el caso considerando el fundamento teórico, reflejando el capital, los intereses y el saldo en cada periodo.

Tabla 2-1. Amortización de intereses

Periodo	Capital	Interés	Saldo
1	100,000	1,000	101,000
2	100,000	1,000	102,000
3	100,000	1,000	103,000

Solución:

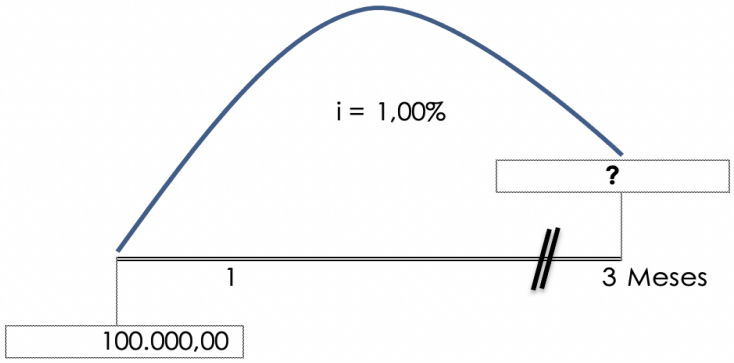
- Capital Inicial **(C) = 100.000 um**
- Capital Final o Monto **(M) = XXXX ? um**
- Tasa de interés, Ratio o Razón **(i) = 12%anual**
- Plazo, Tiempo o Periodo **(n) = 3 meses**

Ajustar las variables tiempo y tasa

$$12\% = 0{,}12 \div 12 = 0{,}01$$

En el caso del tiempo no es necesario realizar ajustes, ya que éste se encuentre en meses.

Gráfica 2-1. Diagrama o flujo de caja.



Fx Fórmulas

$$\mathbf{M = C(1 + in)}$$

Tabla 2-2. Desarrollo del Problema IS

Capital primario	100.000	100.000
Tiempo (m)	3	3
Tasa de interés	1%	0,010
Monto	?	100.000 x (1+0,01x3)

Resultado obtenido:

Capital primario	100.000	100.000
Tiempo (m)	3	3
Tasa de interés	1%	0,010
Monto	?	103.000

Respuesta: El monto o valor acumulado de una inversión de 100.000 um al final de tres meses, pagando interés simple a razón del 12%anual es de 103.000 um.

Ejemplo 2

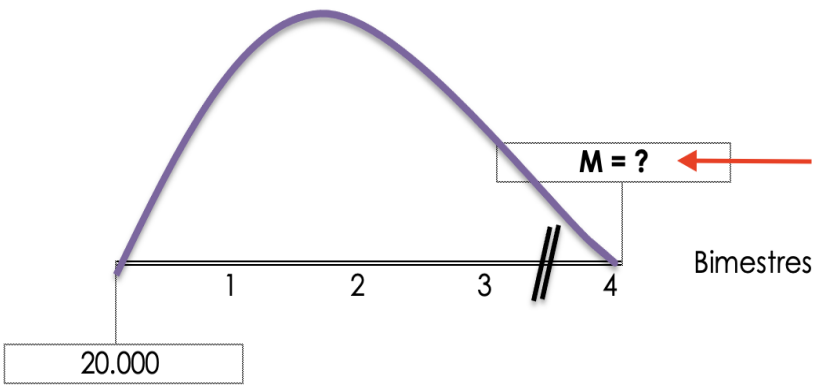
¿Cuál es monto de una inversión de 20.000 um, si se ha obtenido utilidades bajo la modalidad de interese simple, por valor de 3.000 um, después de 4 bimestres?

Solución:

Variables:

C = 20.000 n = 4 I = 3.000 i = **?** M = **?**

Gráfica 2-2. Diagrama o Flujo de caja



Fx Fórmulas

$$\mathbf{M = C + I}$$

$$M = 20.000 + 3.000$$

$$M = 23.000$$

Respuesta: El monto al final de los cuatro bimestres equivale a **23.000 um.**

2.5 CAPITAL O VALOR PRESENTE

Hay que recordar que cuando se habla de valor presente o capital en interés simple, se hace referencia al dinero de la inversión o la financiación.

Ejemplo 3

Alejandra compra un electrodoméstico de la siguiente manera: una cuota inicial de 500.000 um y posteriormente, a los 6 meses cancela un valor equivalente a 1.000.000 um, la entidad le liquida intereses simples a razón del 1,2% mensual; por lo anterior determine:

¿Cuál es el valor que tenía el electrodoméstico a la hora de comprarlo?

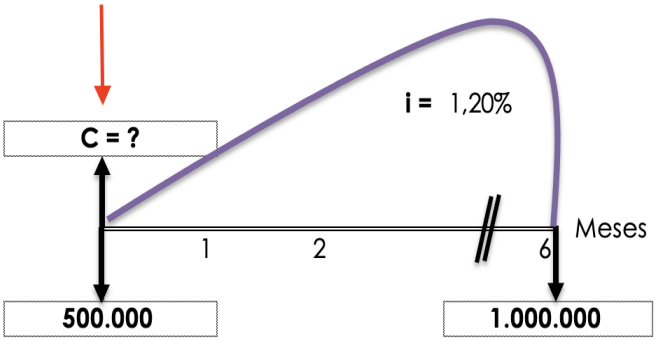
Solución:

Variables:

$P1 = 500.000$ $n_1 = 0$ $P2 = 1.000.000$ $n_2 = 6$

$i = 0{,}012$ $kp = \text{mensual}$ $C = ?$

Gráfica 2-3. Flujo de caja de la compra.



Fx Fórmulas

$$\mathbf{C = M \div (1 + in)} \quad \text{o} \quad \mathbf{C = M(1 + in)^{-1}}$$

Como la forma de cancelar la deuda fue en dos depósitos, se puede hallar el valor presente de cada valor y luego sumarlos de la siguiente manera:

$$\mathbf{C = P1 \div (1 + i(0))} \; + \; \mathbf{P2 \div (1 + i6)}$$

$$C = 500.000 + 1.000.000 \div (1 + 0{,}012 \text{ x } 6)$$

$$C = 500.000 + 932.\,836$$

$$C = 1.432.836$$

Utilizando la fórmula alternativa se tendrá:

$$\mathbf{C = P1(1 + i0)^{-0}} \; + \; \mathbf{P2(1 + i6)^{-1}}$$

$$C = 500.000 + 1.000.000\ (1 + 0{,}012 \text{ x } 6)^{-1}$$

$$C = 500.000 + 932.\,836$$

$$C = 1.432.836$$

Respuesta: El valor que tenía el electrodoméstico a la hora de ser comprado por Alejandra fue de: **1.432.836 um.**

Ejemplo 4

Cierto capital es invertido al 2%mensual, después de 120 días se convirtió en $ 3.700.000; por lo anterior, determine:

1. ¿Cuál fue el valor del capital invertido?

2. ¿Cuáles fueron los intereses generados, si estos se liquidaban cada mes?

Solución:

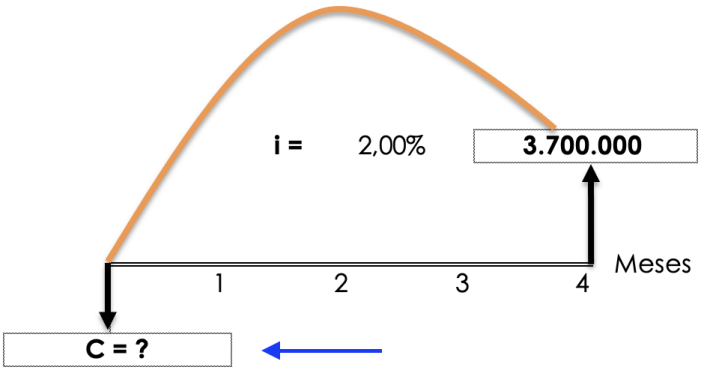
Variables:

$M = 3.700.000$ $n = 120$ $i = 2\%$ $kp = mes\ (12)$ $C = ?$

Ajuste de variables para la liquidación de intereses. (Como la tasa de interés está de forma mensual, estos días son pasados a meses dividiendo en 30, esto, considerando un mes contable de 30 días)

$$\mathbf{n} = 120 \div 30 = 4 \qquad \mathbf{i} = 2 \div 100 = 0{,}02$$

Gráfica 2-4. Flujo de caja de la inversión.



Fx Fórmulas

$$\mathbf{C = M \div C = M\left(1 + in\right)^{-1}} \qquad \mathbf{I = M - C}$$

Sustitución

$$C = 3.700.000 \left(1 + 0{,}02 \times 4 \right)^{-1}$$

$$C = 3.425.926$$

$$I = 3.700.000 - 3.425.926$$

$$I = 274.074$$

Respuesta: El valor del capital invertido equivale a: **$ 3.425.926** y los intereses ganados a **$ 274.074**

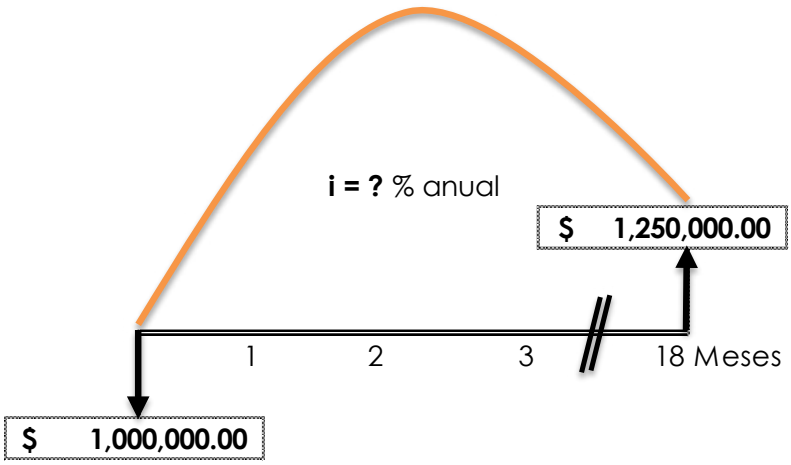
2.6 TASA DE INTERÉS

Ejemplo 5

Calcular la tasa de interés mensual y anual de un capital invertido por valor de $ 1.000.000, el cual acumuló un monto equivalente a $ 1.250.000 al final de un periodo correspondiente a 18 meses.

Solución:

Gráfica 2-5. Diagrama de flujo tasa de interés



Teniendo en cuenta la fórmula general del monto $\mathbf{M = C(1 + in)}$, en la cual despejando la tasa de interés (**i**) se tendra la siguiente ecuación: $\mathbf{i = \left[\frac{M}{C} - 1 \right] \div n}$, con la que se podrá determinar en primer lugar la tasa aplicada al caso financiero.

Las variables suministradas son:

M = $ 1.250.000 C = $ 1.000.000 n = 18 i = **?**

Fx Fórmulas

$$\mathbf{i = \left[\frac{M}{C} - 1 \right] \div n}$$

$$\mathbf{i = [1.250.000 \div 1.000.000 - 1] \div 18} = 0{,}0138888889$$

$$0{,}0138888889 \text{ x } 100 = 1{,}39\%$$

Por otro lado, para hallar la tasa anual basta con multiplicar la tasa del periodo por los periodos de capitalización, en este caso la mensual por el número de periodos que contiene un año, es decir, 12.

$$0{,}0138888889 \times 12 = 0{,}16666667$$

$$0{,}16666667 \times 100 = 16{,}67\%$$

Respuesta: La tasa mensual que permitió que $ 1.000.000 se convirtieran en $ 1.250.000 en 18 meses equivale al 1,39% mensual y al **16,67% anual.**

Ejemplo 6

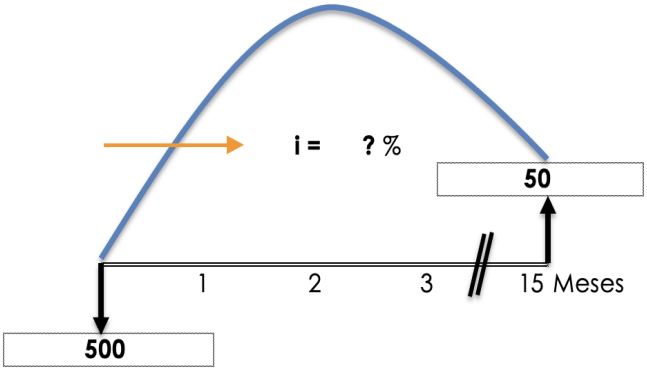
Un inversionista desea calcular la tasa de interés bimestral liquidada en su operación financiera, correspondiente a un capital invertido por valor de 500 um, el cual acumuló una renta de intereses equivalente a 50 um al final de un periodo correspondiente de 15 meses.

Solución:

Las variables suministradas son:

R = 50 C = 500 n = 15 i = ?

Gráfica 2-6. Diagrama de flujo tasa de interés



Fx Fórmulas

$$i = \left[\frac{I}{Cn} \right]$$

$$i = \left[\frac{50}{500\,(15)} \right] = 0{,}0067$$

$$i = 0{,}0067 \text{ x } 100$$

$$i = 0{,}67\%$$

Respuesta: La tasa de interés mensual que permitió que 500 um generaran una renta de 50 um en 15 meses equivale al **0,67%**

2.7 CÁLCULO DEL PLAZO

Ejemplo 7

Sófy desea calcular el tiempo (periodos enteros) que tardaría una inversión de 1.000 USD en generar una renta o ganancia de 200 USD, si este estuviese rentando a una tasa de interés del 1,5% bimestral simple.

¿Cuántos meses tardaría el capital invertido por Sófy para obtener dicha renta?

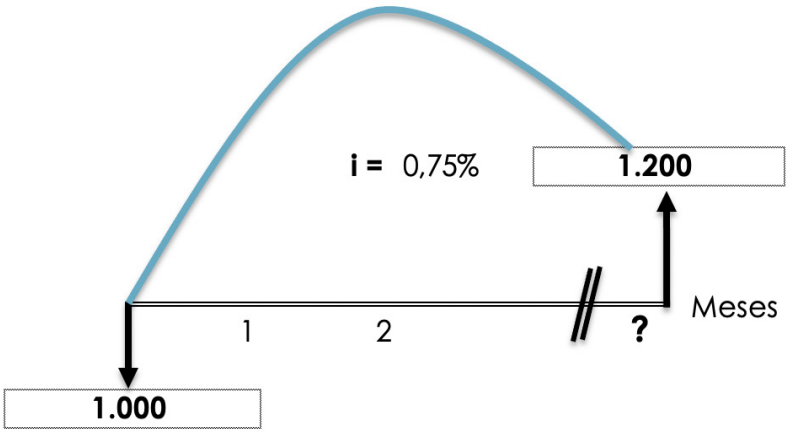
Solución:

Las variables son:

M = 1.200 C = 1.000 i = 1,5%b n = **?**

i = 0,015 ÷ 2 = 0,0075 (como la tasa es bimestral, se divide en 2 para hallar la mensual)

Gráfica 2-7. Diagrama de estimación del plazo



Fx Fórmulas

$$\mathbf{n} = \left| \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{C}} - 1 \right| \div \mathrm{i}$$

Cómo resolver en la calculadora

$$n = [(1.200 \div 1.000) - 1] \div 0{,}0075$$

$$n = 27$$

Respuesta: El tiempo que debe estar depositado un capital de 1.000 USD para que genere 200 USD de renta a una tasa del 0,75%mensual son **27 meses.**

Ejemplo 8

Un inversionista coloca un capital de 1.000 um a rentar a interés simple en una entidad que paga el 1,00%mensual, si la renta corresponde a 150 um. Determine:

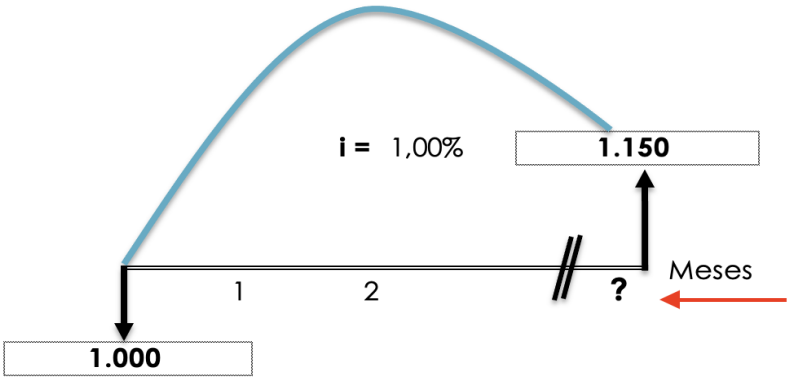
¿Cuál es el tiempo que debe estar depositado el capital?

Solución:

Los datos del problema son:

I = 150 C = 1.000 i = 1,00%m n = ?

Gráfica 2-8. Flujo de caja



Fx Fórmulas

$$n = \left| \frac{I}{Ci} \right|$$

Luego, se procede a sustituir en la fórmula.

$$n = \left| \frac{150}{1.000 \text{ x} 0,01} \right|$$

$$n = 15$$

Respuesta: El tiempo que debe estar depositado un capital de 1.000 um para que genere 150 um de renta a una tasa del 1,00% mensual son **15 meses.**

2.8 CALCULAR EL INTERÉS

Ejemplo 9

Cierto capital es colocado a rentar a interés simple en una entidad que paga el 1,00%mensual. Si el tiempo estimado de la operación es de 2 años por una inversión de 1.000 um. Determine:

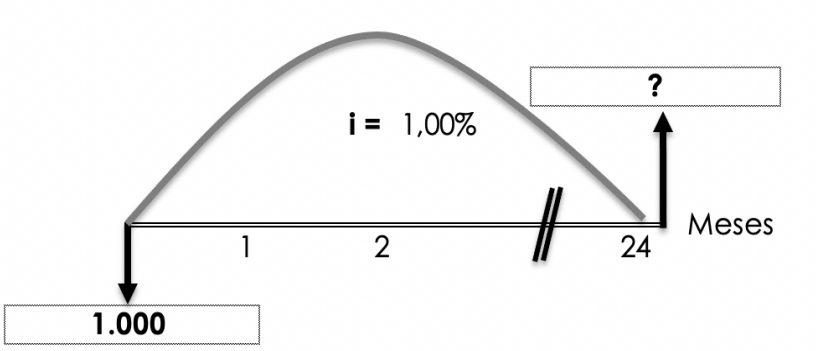
¿Cuál es el interés generado al final del plazo?

Solución:

Los datos del problema son:

$C = 1.000$ $i = 0,01$ $n = 24$ $I = ?$

Gráfica 2-9. Diagrama de cálculo de intereses



Fx Fórmulas

$$\mathbf{I = C}\left[\left(1+\mathbf{in}\right)-1\right]$$

$$\mathrm{I} = 1.000\left[\left(1+0{,}01\ \mathrm{x}24\right)-1\right]$$

$$\mathrm{I} = 240$$

Respuesta: Los intereses generados al final de los 2 años corresponden a **240 um.**

Ejemplo 10

Una vez identificado el estado de liquidez de un inversionista, éste, destina un capital equivalente a 5.200 um a rentar en una operación que liquida rendimientos simples, la entidad establece pagar el 1,20%de manera trimestral. Si el tiempo estimado del ejercicio es de 2 años. Determine:

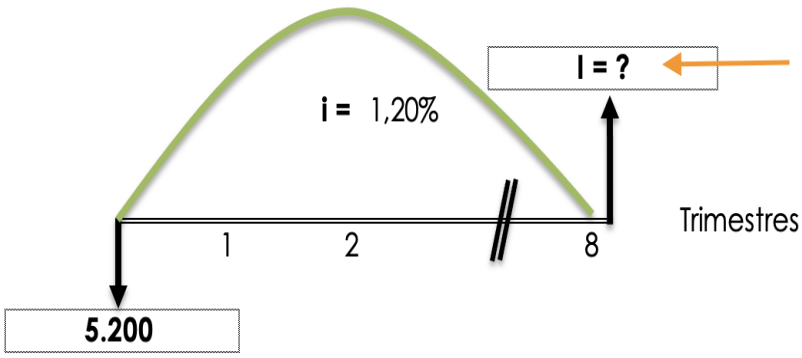
¿Cuál es el interés generado al final del plazo de la inversión?

Solución:

Los datos del problema son:

C = 5.200 i = 0,012 n = 8 I = ?

Gráfica 2-10. Diagrama de cálculo de intereses



Fx Fórmulas

$$I = Cin$$

$$I = 5.200 \times 0,012 \times 8$$

$$I = 499$$

Respuesta: Los intereses generados por la inversión de los 5.200 um al final de los 2 años corresponden a **499 um.**

2.9 DESCUENTO SIMPLE

El descuento es la cantidad de dinero que una persona paga por una deuda de manera anticipada, es decir, antes de que se venza la obligación.

Desde otra mirada, es válido decir que el descuento simple es el valor o cantidad de dinero que, una persona o empresa deja de pagar por pronto pago o cancelación del total la deuda antes de su vencimiento.

Se deben tener en cuenta las siguientes variables:

- **D** = Descuento
- **id** = Tasa de Descuento
- **Vp** = Valor por pagar
- **Vd** = Valor de la deuda u obligación
- **n** = Tiempo

Fx Fórmulas

$$Vp = Vd - D \qquad \mathbf{D = Vd \cdot id \cdot n} \qquad \mathbf{V_P = Vd(1 - id.n)}$$

2.10 VALOR POR PAGAR

Ejemplo 11

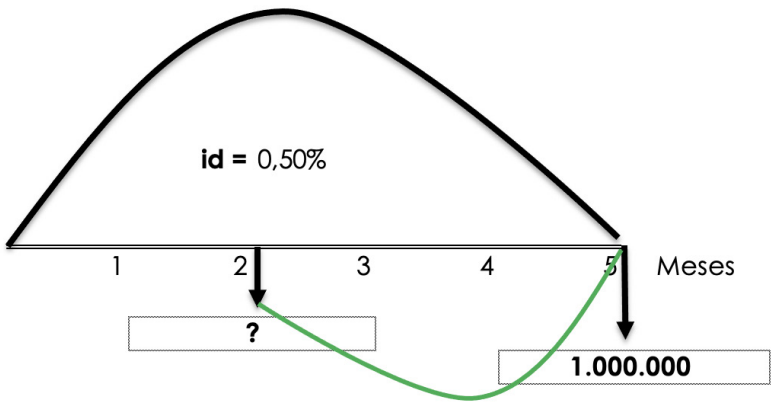
Una persona que tiene una deuda de $ 1.000.000 por vencer dentro de 5 meses, recibe la siguiente oferta: si paga antes del vencimiento recibiría el 0,5%por cada mes.

¿Cuál será el valor a pagar por la deuda, 3 meses antes del vencimiento?

Solución:

$$Vd = 1.000.000 \qquad id = 0{,}005 \qquad n = 3 \qquad Vp = \mathbf{?}$$

Gráfica 2-11. Diagrama de estimación del valor por pagar



Fx Fórmulas

$$\mathbf{V_P = Vd\left(1 - id.n\right)}$$

$$\mathbf{Vp} = 1.000.000\ (1 - 0{,}005 \times 3)$$

$$\mathbf{Vp} = 985.000$$

Respuesta: Si la persona decide cancelar su deuda 3 meses antes de su vencimiento, tendría que pagar un valor equivalente a **$ 985.000,** es decir, tendría un descuento de $ 15.000.

2.11 DESCUENTO

Ejemplo 12

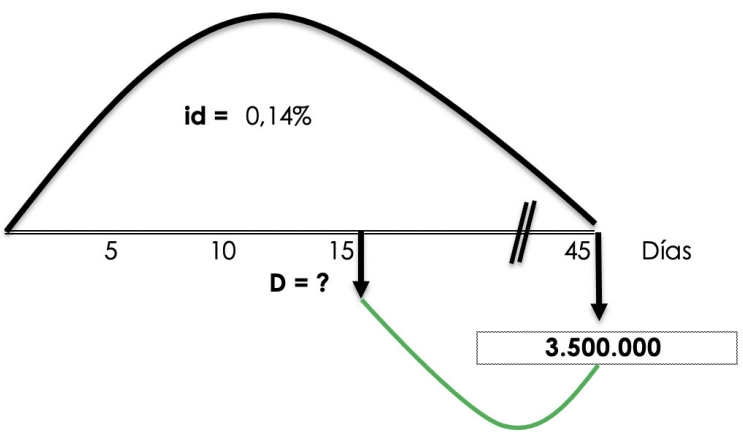
Una empresa tiene una factura que está por vencer en 45 días por valor de $ 3.500.000, el proveedor dio la opción de pagar antes del vencimiento y que por tal decisión el cliente tendría una tasa de descuento diario del 0,14%

Si la empresa decide pagar la deuda 15 días antes del vencimiento, ¿cuál sería el valor del descuento recibido sobre el valor de la factura?

Solución:

$Vd = 3.500.000$ $id = 0,0014$ $n = 15$ $D = ?$

Gráfica 2-12. Diagrama cálculo del interés



Fx Fórmulas

$$\mathbf{D = Vd\left[1-\left(1-id\cdot n\right)\right]}$$

$$D = 3.500.000\left[1-\left(1-0,0014\cdot 15\right)\right]$$

$$D = 73.500$$

Respuesta: El descuento recibido por pagar los 3,5 millones 15 días antes de su vencimiento sería igual a **$ 73.500.**

2.12 CÁLCULO DE LA TASA DE DESCUENTO

Ejemplo 13

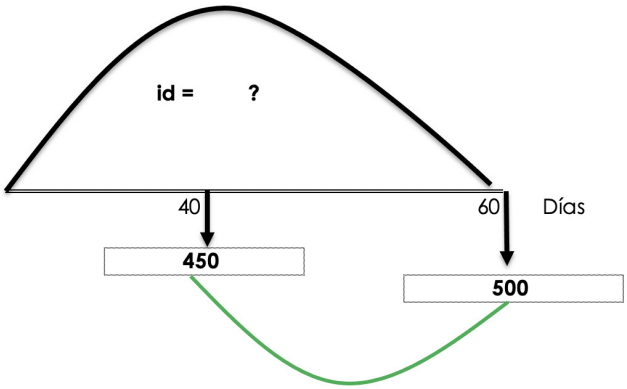
Cierta persona ostentaba una obligación de 500 USD a una entidad, la cual debía pagar en 2 meses, sin embargo, poco antes de vencer la deuda se acercó para cancelar dicha obligación, cuando llegó a la ventanilla de la entidad, la persona encargada le entregó su cuenta, con la sorpresa que tan solo tendría que pagar 450 USD.

Si el acreedor fue 20 días antes del vencimiento a la entidad, ¿cuál fue la Tasa de Descuento aplicada?

Los datos o variables que arroja el problema son:

Vd = 500 Vp = 450 n = 20 id = **?**

Gráfica 2-13. Diagrama de cálculo de la tasa de descuento



Fx Fórmulas

$$id = \left|1 - \frac{Vp}{Vd}\right| \div n$$

$$id = \left|1 - \frac{500}{450}\right| \div 20$$

$$id = 0{,}005 \text{ x } 100 = 0{,}5\%$$

Respuesta: El descuento recibido por la deuda de 500 USD fue del **0,5%** diario.

2.13 CÁLCULO DEL VALOR DE ADEUDADO

Ejemplo 14

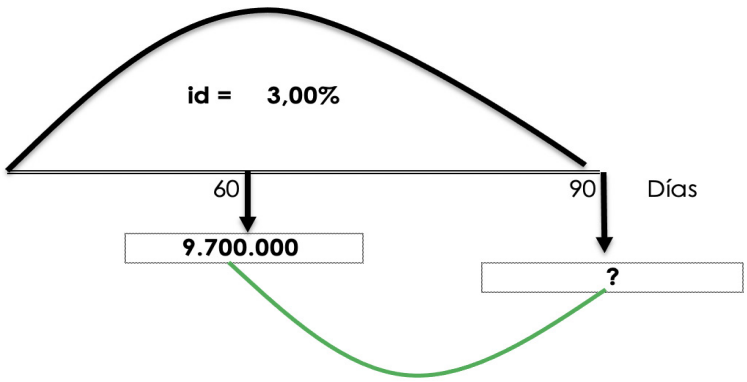
El Profesor Vanegas un inversionista conservador, posee un título de renta fija que vence dentro de 90 días; a consecuencia de una pandemia mundial, su flujo de caja se ha visto fuertemente afectado y como resultado de su iliquidez decidió vender el documento y así cubrir su desequilibrio financiero.

El comprador pagó $ 9.700.000 30 días antes del vencimiento, si el documento se descontó a razón del 3%mensual simple, ¿cuál era el valor del título al vencimiento?

Los datos del caso son:

$Vp = \$\ 9.700.000 \qquad n = 30 \qquad id = 0{,}03 \div 30 = 0{,}001 \qquad Vd = ?$

Gráfica 2-14. Diagrama de cálculo del valor adeudado



Fx Fórmulas

$$\mathbf{Vd} = Vp \div (1 - id \cdot n)$$

$$Vd = 9.700.000 \div (1 - 0{,}00\ x30)$$

$$Vd = 10.000.000$$

Respuesta: El valor del título al vencimiento corresponde a un equivalente de **$10.000.000.**

2.14 DETERMINAR EL TIEMPO

Ejemplo 15

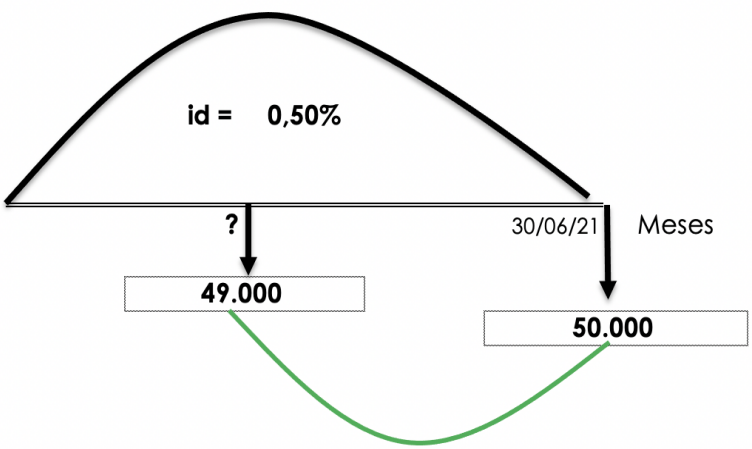
El señor J.C. Bonell es el tenedor de un bono por valor de 50.000 USD que vence el 30 de junio de 2023, pero por temas de iliquidez deberá cederlo antes de su vencimiento para no perder más de 1.000 USD con su venta.

¿En qué fecha debe ceder el título para no perder más de 1.000 USD, considerando una tasa de descuento del 0,5% mensual?

Los datos del caso son:

Vp = 50.000 - 1.000 = 49.000 Vd = 50.000 id = 0,005 n = **?**

Gráfica 2-15. Diagrama de cálculo del tiempo



Fx Fórmulas

$$\mathbf{n} = \left| 1 - \frac{\text{Vp}}{\text{Vd}} \right| \div \text{id}$$

$$\text{n} = \left| 1 - \frac{49.000}{49.000} \right| \div 0,005$$

$$\text{n} = 4$$

Respuesta: Teniendo en cuenta que en los bonos se manejan días calendario y el tiempo para vender el título son **4** meses antes del vencimiento, la fecha estimada para venderlo sin que pierda más de 1.000 USD es el 28 de febrero de 2023.

2.15 ECUACIONES DE VALOR

Son expresiones matemáticas que dan solución al planteamiento de un problema, y el interés simple no es la excepción. A continuación, se verán algunos ejemplos.

Hallar el valor de la **X**

Ejemplo 16

La siguiente expresión refleja una igualdad, para lo cual se despeja una incógnita (x), el desarrollo debe llevar a determinar el valor de esta. El procedimiento es el siguiente:

$$720.000\left(1 + 0,0015 \text{ x} \frac{1}{6}\right) + 150.000 = \mathbf{X}\left(1 + 0,0015 \text{ x} \frac{1}{6}\right)$$

$$870.180 = 1,00025 \text{ X}$$

$$\text{X} = 870.180 \div 1,00025$$

$$\text{X} = 869.962,51$$

Ejemplo 17

Al igual que el caso anterior, es necesario hallar el valor de X.

$$1.000.000 + 13.900X = 1.250.000$$

$$13.900X = 1.250.000 - 1.000.000$$

$$13.900X = 250.000$$

$$X = \frac{250.000}{13.900}$$

$$X = 18$$

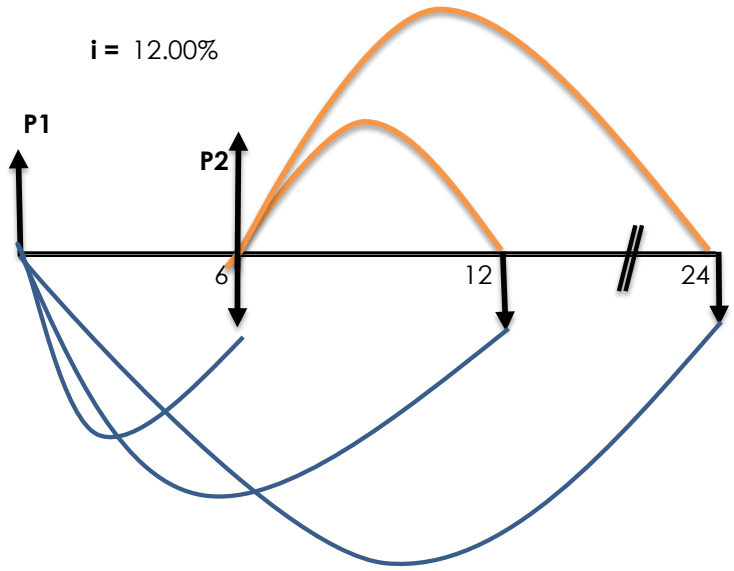
Ejemplo 18

Finalmente, un caso en el cual se requiere determinar el precio de un artículo.

Se compra una máquina la cual se pagará de la siguiente manera: un pago de 50.000.000 en 6 meses, otro de 100.000.000 al año de comprada y finalmente un pago de 200.000.000 a los 2 años. Si se considera una tasa del 12%anual, determine el valor de contado de la máquina y su precio dentro de 6 meses. Lo anterior mediante dos ecuaciones de valor.

Pero antes de determinar las ecuaciones de valor, es fundamental realizar un diagrama.

Gráfica 2-16. Diagrama de pagos por la adquisición de la máquina



Fx Fórmulas

$$\textbf{Precio}_1 = P(1+in)^{-6} + P(1+in)^{-12} + P(1+in)^{-24}$$

$$\textbf{Precio}_2 = P + P(1+in)^{-6} + P(1+in)^{-18}$$

2.16 APLICACIÓN EN EL SECTOR REAL

El interés simple es utilizado en el sector real por el sistema financiero formal e informal. Seguidamente, se verá cómo se aplica este sistema en una inversión de títulos de renta fija, para el caso concreto, un Certificado de Depósito a Término (CDT).

Ejemplo 19

La señora Marina una inversionista conservadora, decide invertir en un título de renta fija; para esto, deposita 50 millones de COP en el banco de su localidad que paga intereses a razón del 0,37% mensual durante 6 meses.

Es importante tener en cuenta que este tipo de rendimientos, son afectados en Colombia con retención en la fuente del 4%según la legislación tributaria del momento.

Se requiere:

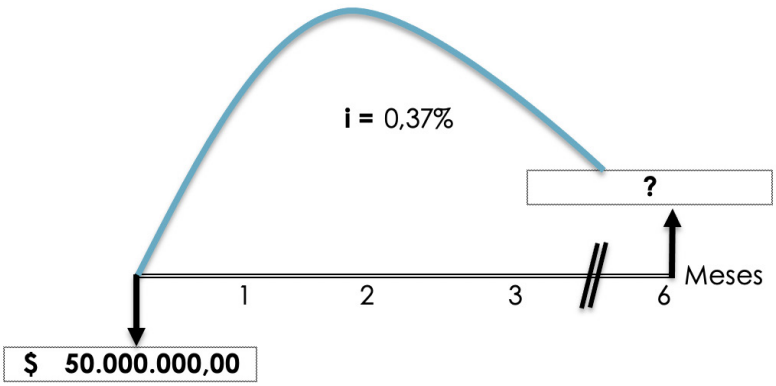
a. Determinar los intereses o rendimientos brutos.
b. Calcular el valor de la retención una vez se venza el título.
c. Establecer el valor de los rendimientos netos.

Solución:

Considerando que se requiere calcular los rendimientos, la fórmula para utilizar es I = c i n

Es importante antes de efectuar algún cálculo, elaborar un diagrama que refleje la información del problema financiero.

Gráfica 2-17. Diagrama de inversión de un CDT



El paso para seguir es identificar las variables por utilizar.

Tabla 2-3. Variables del caso CDT

Inversión - C	50.000.000	50.000.000
Tiempo en meses - n	6	6
Tasa de interés - i	0,37%	0,0037
Tasa de retención - Rte	4%	0,04
Intereses brutos - INT B	?	
Retención total - RT	?	
Intereses netos - INT N	?	

Cálculos

$$\text{INT B} \quad \text{cin} = 50.000.000 \times 0,0037 \times 6 = 1.110.000$$

$$\text{Rte T} = \text{INT B} \times \text{Rte} = 1.110.000 \times 0,04 = 44.400$$

$$\text{INT N} = \text{INT B} - \text{R T} = 1.110.000 - 44.400 = 1.065.600$$

De esta manera se tendrá:

Tabla 2-4. Solución: liquidación del CDT

Inversión - **C**	50.000.000	50.000.000
Tiempo en meses - **n**	6	6
Tasa de interés - **i**	0,37%	0,0037
Tasa de retención - **Rte**	4%	0,0400
Rta: 1 intereses brutos	?	1.110.000
Rta: 2 retención total	?	44.400
Rta: 3 intereses netos	?	1.065.600

De esta forma se da aplicación en el sector financiero, al cálculo y uso del interés simple en operaciones de inversión, caso puntual títulos de renta fija como los Certificados de Depósito a Término - CDT.

PROBLEMAS

1. Se necesita saber el monto que se retirará dentro de 4 años, sí hoy se invierte 2.000 um al 8%para el primer año con incrementos del 1%para los próximos 3 años.

   Respuesta: 2.760 um

2. Calcular el interés simple que debe pagarse por un préstamo de $ 3.500.000 al 16%anual en 200 días.

   Respuesta: $ 311.111

3. Calcular el interés simple que produce un capital de $12.000.000 en 1 año y 6 meses al 3%trimestral.

   Respuesta: $ 2.160.000

4. Cierto capital invertido al 2%mensual después de 90 días se convirtió en $ 3.700.000, ¿cuáles son sus intereses?

   Respuesta: $ 3.490.566

5. ¿A qué tasa de interés anual un capital de 200 USD será equivalente a 212, a interés simple en 9 meses?

   Respuesta: 8,00%anual

6. Un inversionista estima que un terreno puede ser negociado dentro de 1 año por $ 85.000.000. ¿Cuánto será lo máximo que él está dispuesto a pagar hoy, si desea obtener un interés del 4%semestral simple?

   Respuesta: $ 73.703.704

7. Cierto capital invertido al 3%mensual después de 2 años se convirtió en $ 34.400.000. ¿Cuál es el valor del capital y cuáles son sus intereses?

   Respuesta: $ 20.000.000

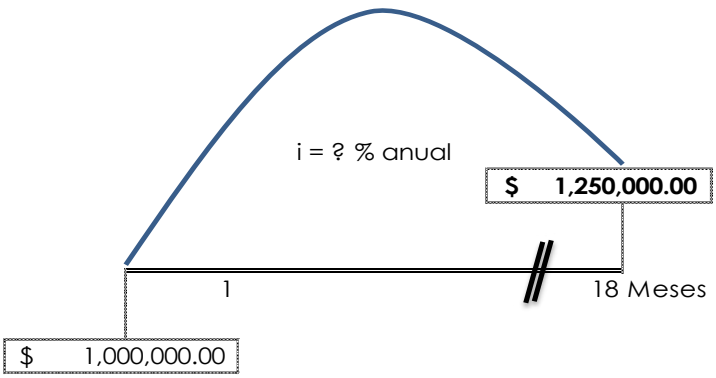
8. Una caja de ahorros reconoce el 8,10%semestral de interés simple. Si hoy deposito 50.000 USD, ¿cuánto tiempo (meses) se debe esperar para obtener $ 212.725.000, si la TRM para la fecha corresponde a $ 3.350?

   Respuesta: 20 meses

9. Hallar el valor que se debe pagar al finalizar el año, si se prestan $ 8.500.000 cobrando una tasa de interés simple anual del 20%

   Respuesta: $ 10.200.000

10.



Respuesta: 16,67%anual

3. Interés compuesto

Se define como la cantidad de dinero pagado sobre un capital, el cual pasa a ser parte de este, periodo tras periodo"

3.1 OBJETIVO

Identificar y aplicar herramientas que den solución a problemas de tipo financiero relacionados con el modelo de interés compuesto, en cuanto a la toma de decisiones en el campo de la inversión y financiación.

3.2 CARACTERÍSTICAS DEL INTERÉS COMPUESTO

El interés calculado en un periodo pasa a ser parte del capital en el siguiente, es decir, que se capitaliza.

Los intereses son calculados sobre el saldo de la obligación.

Es posible calcular el valor futuro de un capital o valor presente.

Se puede establecer el valor de un capital o valor presente invertido.

Este tipo de interés es aplicado en el sistema financiero a créditos o préstamos.

3.3 VARIABLES PARA TENER EN CUENTA

- Valor Presente (VP)
- Valor Futuro (VF)
- Tasa de interés, Ratio o Razón (i)
- Plazo, Tiempo o Periodo (n)
- Interés o Renta (I)
- Capitalización (Kp)

3.4 FÓRMULA GENERAL

La fórmula es resultado de una tabla de amortización en la cual se aplica el concepto de interés compuesto. Como se desarrolla a continuación, ésta dará una mejor comprensión del tema.

Tabla 3-1. Tabla progresiva del origen de la fórmula de interés compuesto o valor futuro

Periodo	Presente	Interés	Futuro	Fórmula
0	P	I	F = P + I	F = P + I
1	P	P x i	F = P + Pi	F = P(1+i)
2	P(1+i)	P(1+i) x i	F = P(1+i) + P(1+i) x i	$F = P(1+i)^2$
3	$P(1+i)^2$	$P(1+i)^2$ x i	$F = P(1+i)^2 + P(1+i)^2$ x i	$F = P(1+i)^3$
N	$P(1+i)^{n-1}$	$P(1+i)^{n-1}$ x i	$F = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-1}$ x i	$F = P(1+i)^n$

Valor Futuro = Valor Presente + Interés $VF = VP + I$ Entonces,

Interés = Capital * Tasa $I = VP * i$

Factorizando:

Valor Futuro = VP + VP x I $\mathbf{VF = VP(1+i)^n}$

3.5 VALOR FUTURO

Ejemplo 1

¿Cuál es el valor final de una inversión de 100.000 um, si se han obtenido utilidades de 3.030,10 um después de 3 meses a interés compuesto, con rendimiento del 12%de tasa anual?

Para resolver un problema financiero de interés compuesto, es necesario tener en cuenta el siguiente procedimiento:

Como se mencionó anteriormente, la fórmula de interés compuesto es fruto de una tabla de amortización. A continuación, la ilustración señalará el caso considerando el fundamento teórico.

Solución:

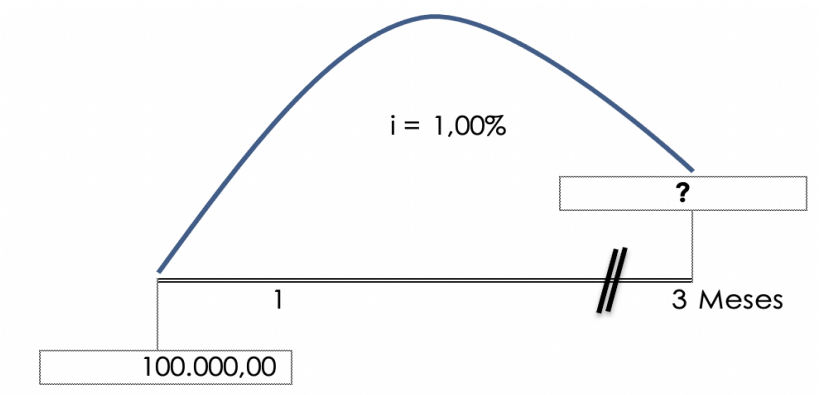
- Valor Presente (VP) = 100.000 um
- Capital Final o Valor Futuro (M) = x ? um
- Tasa de interés, Ratio o Razón (i) 12%
- Plazo, Tiempo o Periodo (n) = 3 meses
- Interés o Renta (I) = 3.030,10 um

Tabla 3-2. Amortización de intereses para ajustar las variables tiempo y tasa

Periodo	Valor presente	Interés	Saldo
1	**100.000,00**	1.000,00	101.000,00
2	101.000,00	1.010,00	102.010,00
3	102.010,00	1.020,10	**103.030,10**

$$12\% = \ 0{,}12 \div 12 \ = 0{,}01$$

Gráfica 3-1. Flujo de Caja del Valor Futuro



Fuente: Propia

Fx Fórmulas

$$VF = \ VP \ (1+ i)^{n}$$

Desarrollo:

$$Vp = 100.000 \qquad i = 0{,}01 \qquad n = 3 \qquad kp = \text{mensual} \qquad Vf = \ ?$$

$$VF = 100.000 \ (1+ 0{,}01)^{3} = 103.030{,}10$$

Respuesta: El valor acumulado o valor futuro de una inversión de 100.000 um al final de 3 meses, pagando interés compuesto a razón del 12% anual es de **103.030,10 um.**

3.6 EXCEL Fx VF

Excel dentro de sus bondades ofimáticas cuenta diferentes funciones que permiten hacer más sencillo y preciso este tipo de cálculos financieros, para este caso se dará solución del problema anterior (ejercicio 1 del capítulo), mediante la función denominada *VF*.

Para ello es necesario plantear en una hoja de Excel la información de la siguiente manera:

Tabla 3-3. Tabla de Excel lista para aplicar función VF

Valor presente	100.000	100.000
Tiempo	3	3
Tasa de interés	12%	0,01
Capitalización	Mensual	12
Valor futuro	?	

Ubicados en la celda frente al valor a hallar de color gris, como se observa en la tabla 3-3 de la hoja de Excel o también llamada hoja de cálculo, se debe insertar función (Fx); en la opción *categoría* elegir *financiera* y posteriormente en la lista seleccionar *VF*.

Ver cómo es esto.

Imagen 13. Insertar función.

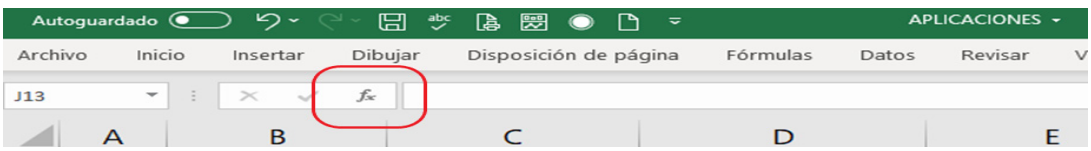


Imagen 14. Ventana Insertar Función.

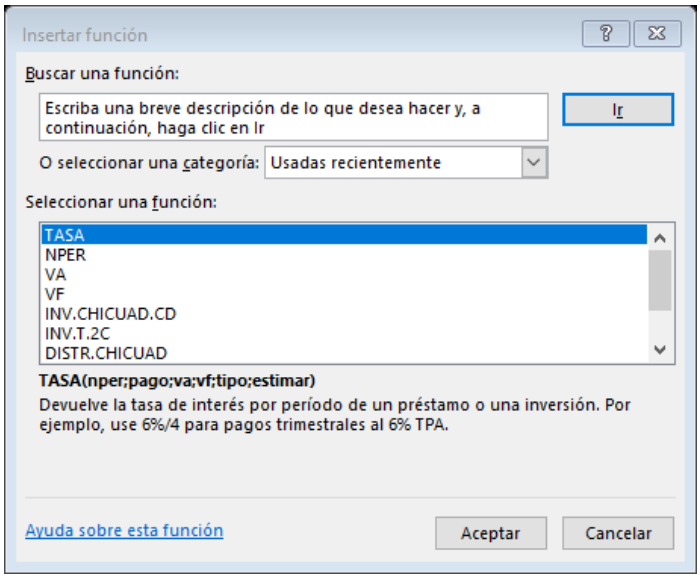
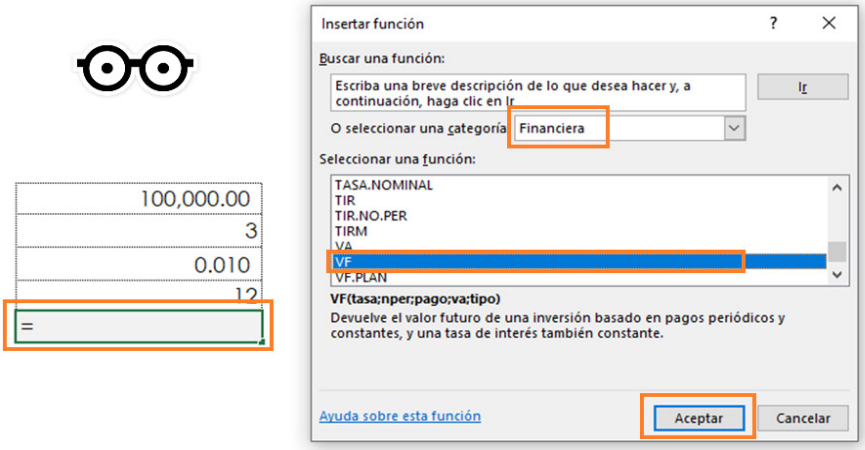


Imagen 15. Función VF.

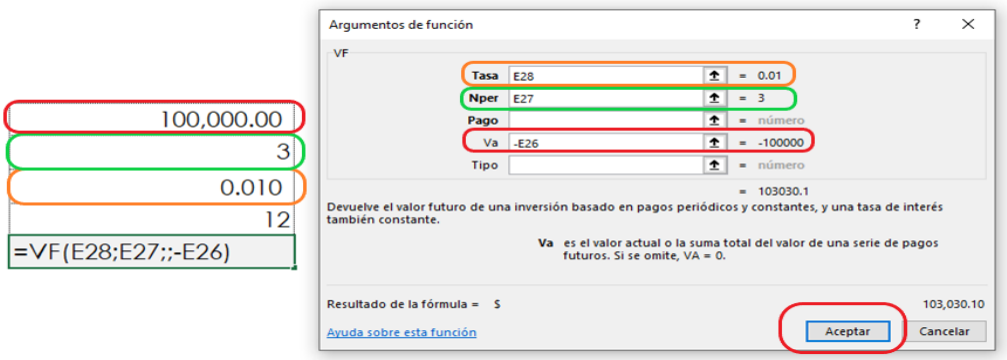


Luego aparecerá otra ventana que solicitará los datos de tasa de interés, número de periodos o tiempo y valor presente, las demás variables por

ahora no se trabajan; finalmente, se debe tener en cuenta que al valor actual o presente o capital se le debe anteponer un signo menos ya que las inversiones o los egresos son negativos.

Ver cómo es esto.

Imagen 16. Función VF variables.



Luego que se tiene las tres variables listas, se encontrará que el resultado ya aparece previsualizado; en caso de ser negativo, quizá se olvidó anteponer el signo menos al valor presente. Por último, pulsar en *Aceptar*.

Tabla 3-4. Tabla de Excel lista para aplicar la función VF

Valor presente	100.000	100.000
Tiempo	3	3
Tasa de interés	12%	0,010
Capitalización	Mensual	12
Valor futuro	?	103.030,10

Se denota que, al operar el caso de manera mecánica en la calculadora a través de una fórmula con la función de Excel, el resultado es el mismo. Así, se obtendrá como repuesta que al invertir 100.000 um para rentar al 12%anual compuesto durante 3 meses, el valor futuro equivale a **103.030,10**.

Ejemplo 2

Una pequeña empresa dedicada a la elaboración de productos cosméticos en su localidad generó utilidades en su ejercicio anterior, las cuales superaron las expectativas de los propietarios del negocio. Para lo cual, la junta de socios tomó algunas decisiones con respecto a dichos beneficios, una de estas fue crear un nuevo producto financiado con los recursos y otra, invertir en títulos de renta fija ofertados por el sistema.

Finalmente, se decide llevar a acabo la financiación del nuevo proyecto, sin embargo, era necesario que mientas se realizaban los estudios previos, los recursos fuesen productivos, es decir, no se mantuviesen ociosos. En consecuencia, se dejarían en la entidad financiera donde la empresa tiene sus cuentas bancarias. Algunos se preguntaban cuál sería el resultado de dicha operación. Para responder a dicho interrogante este se lo postulo a asesor financiero y fue:

¿Cuál es valor final de una inversión de 50.000 USD después de un año de depositado el dinero? El asesor financiero manifestó que los intereses generados se estimaban mediante el modelo de interés compuesto a razón del 0,2%mensual.

Solución:

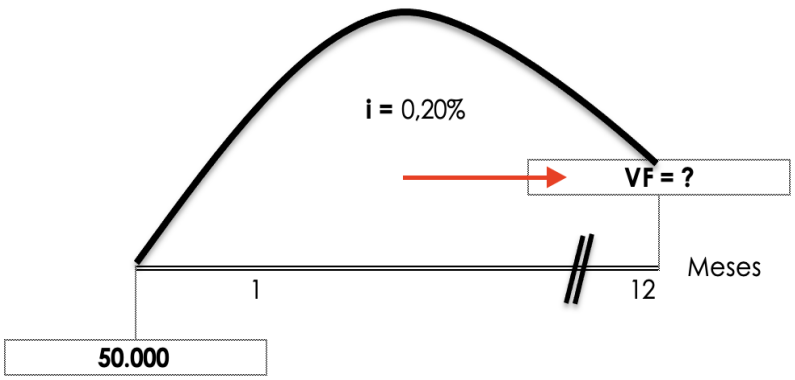
Las variables que arroja el caso son:

VP = 50.000 usd i = 0,2%m n = 1año Kp = 12 VF = ?

Dado que las variables deben estar en la misma unidad de tiempo de la capitalización, es decir, mensual, es necesario pasar el tiempo a meses y la tasa pasarla a decimal. De esta forma se tendrá:

VP = 50.000 i = 0,002 n = 12 Kp = 12 VF = ?

Gráfica 3-2. Flujo de caja del valor futuro 2



Fx Fórmulas

$$VF = VP\ (1+ i)^{n}$$

$$VF = 50.000\ (1+ 0,002)^{12}$$

$$VF = 51.213,29$$

Respuesta: El valor acumulado de la inversión de 50.000 usd mas intereses al final del año, pagando interés compuesto a razón del 0,2% mensual es de **50.213,29 USD.**

3.7 VALOR PRESENTE

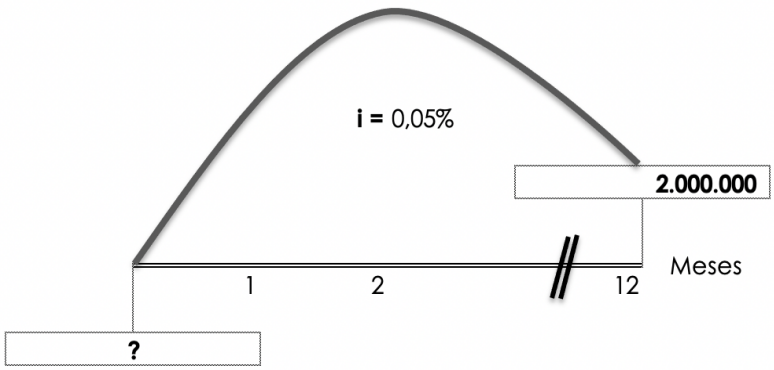
Ejemplo 3

¿Qué cantidad de dinero se debe depositar el día de hoy en una cuenta de ahorros, si se desea que al final de un año el valor sea equivalente a 2.000.000 um, considerando que la entidad financiera paga el 0,05%mensual de interés?

Solución:

Vf = 2.000.000 i = 0,0005 n = 12 Kp = mensual Vp = ?

Gráfica 3-3. Diagrama Valor Presente



Fx Fórmulas

$$\mathbf{VP} = \mathbf{VF}(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}$$

$$\mathrm{VP} = 2.000.000(1+0,0005)^{-12}$$

$$\mathrm{VP} = 1.988.038,91$$

Otra forma de solucionar el caso es mediante esta fórmula:

$$\mathbf{VP} = \mathbf{VF} \div (1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}}$$

$$\mathrm{VP} = 2.000.000 \div (1+0,0005)^{12}$$

$$\mathrm{VP} = 1.988.038,91$$

Respuesta: Si una persona desea acumular 2.000.000 al final de un año en una cuenta de ahorros que paga intereses cada mes al 0,05% hoy debe depositar 1.988.038,91.

3.8 EXCEL Fx VA

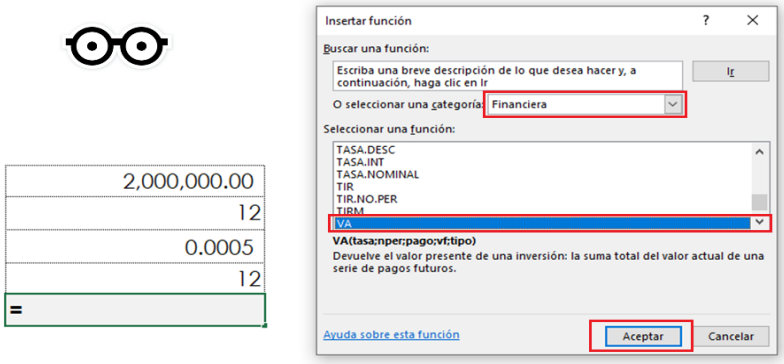
Para ello es necesario plantear en una hoja de Excel la información de la siguiente manera:

Tabla 3-5. Tabla de Excel lista para aplicar función VA

Valor futuro	2.000.000	2.000.000
Tiempo	12	12
Tasa de interés	0,05%	0,0005
Capitalización	Mensual	12
Valor presente	?	

Como se hizo anteriormente, es necesario ubicar la celda frente al valor a hallar de color gris, como se observa en la tabla 3-5 de la hoja de Excel o también llamada hoja de cálculo. Luego de insertar función (Fx), en la opción *categoría* se elige *financiera* y luego dentro la lista seleccionar *VA*.

Imagen 17. Función VA.



Luego aparecerá otra ventana que solicitará los datos de tasa de interés, número de periodos o tiempo y valor futuro negativo, las demás variables por ahora no se trabajan.

Observar resultado:

Imagen 18. Función VA variables

Luego de que se tienen las tres variables listas, se observa que el resultado ya aparece previsualizado; en caso de ser negativo, quizá se olvidó anteponer el signo menos al valor futuro. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Valor futuro	2.000.000	2.000.000
Tiempo	12	12
Tasa de interés	0,05%	0,0005
Capitalización	Mensual	12
Valor presente	?	1.988.038,91

Respuesta: El dinero que se debe depositar en la cuenta de ahorros debe ser **1.988.038,91.**

Ejemplo 4

Una persona recibe como herencia un valor equivalente a 2.024.126 de um. Para lo cual se realiza el siguiente interrogante:

¿Qué cantidad de dinero fue depositada en la cuenta de ahorros dos años atrás, considerando que la entidad financiera pagó el 0,60% anual y cada tres meses se liquidaban interés?

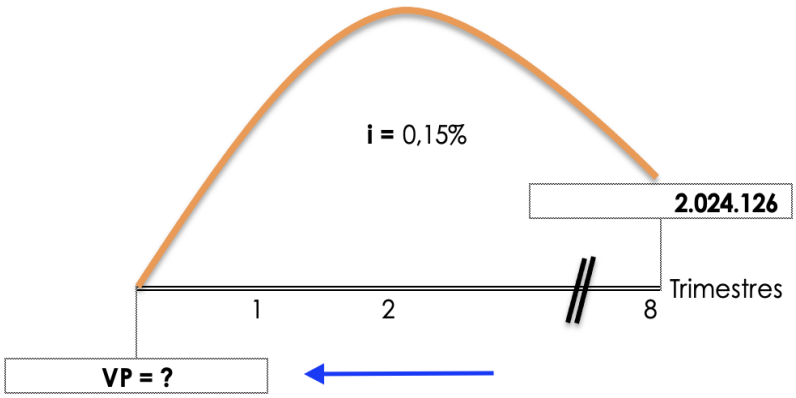
Solución:

$$Vf = 2.024.126 \quad i = 0,6=\% \quad n = 2 \text{ años} \quad Kp = Trim \quad Vp = ?$$

Teniendo en cuenta que la capitalización de los intereses se hacían cada trimestre, es necesario convertir el tiempo y la tasa de interés en la misma unidad. Lo cual quedará así:

$$Vf = 2.024.126 \qquad i = 0{,}0015 \qquad n = 8 \qquad Kp = 4 \qquad Vp = ?$$

Gráfica 3-4. Diagrama valor presente



Fx Fórmulas

$$\mathbf{VP = VF(1+i)^{-n}}$$

$$VP = 2.024.126(1+0{,}0015)^{-8}$$

$$VP = 2.000.000$$

Respuesta: El valor depositado dos años atrás corresponde a **2.000.000** um donde se pagaba intereses cada trimestre al 0,15%

3.9 TIEMPO O PLAZO

Ejemplo 5

Heidi TC coloca a rentar un capital de 1.000 USD en una entidad que paga intereses a razón del 1% mensual compuesto, si su propósito es alcanzar un rendimiento o intereses de 100 USD. Determine:

¿Cuánto tiempo debe esperar Jeidi para que su dinero rente lo esperado?

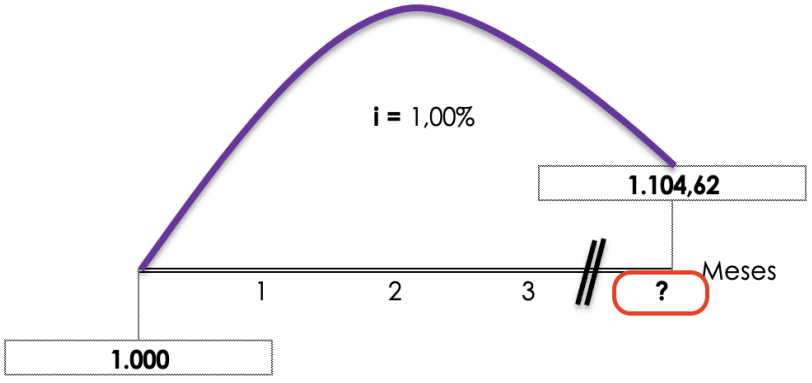
Fx Fórmulas

$$\mathbf{n} = \frac{\log\left(\mathbf{VF} \div \mathbf{VP}\right)}{\log\left(1 + \mathbf{i}\right)}$$

Desarrollo:

Vp = 1.000 Vf = 1.104,62 i = 0,01 kp = mensual n = **?**

Gráfica 3-5. Diagrama cálculo del tiempo



$$n = \frac{\log(1.104,62 \div 1.000)}{\log(1+0,01)}$$

$$n = 10$$

Respuesta: Si un inversionista desea ganar 100 USD sobre un capital de 1.000 USD, debe esperar que su dinero rente durante 10 meses al 1%

3.10 EXCEL Fx NPER

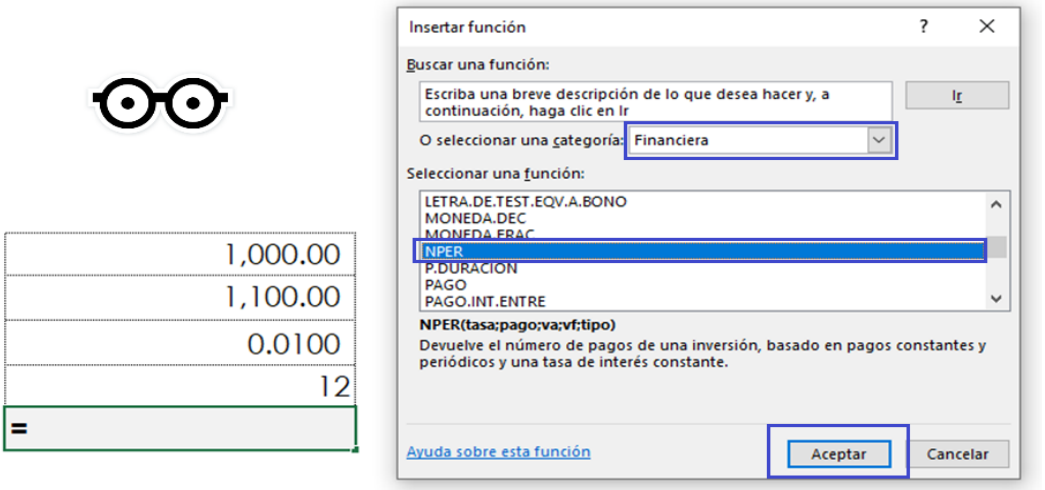
Así como ya se calculó el valor futuro y valor presente, para el caso del tiempo también es necesario plantear en una hoja de Excel la información de la siguiente manera:

Tabla 3-6. Tabla de Excel lista para aplicar función NPER

Valor futuro	1.100,00	1.100,00
Valor presente	1.000,00	1.000,00
Tasa de interés	1%	0,0100
Capitalización	Mensual	12
Tiempo	?	

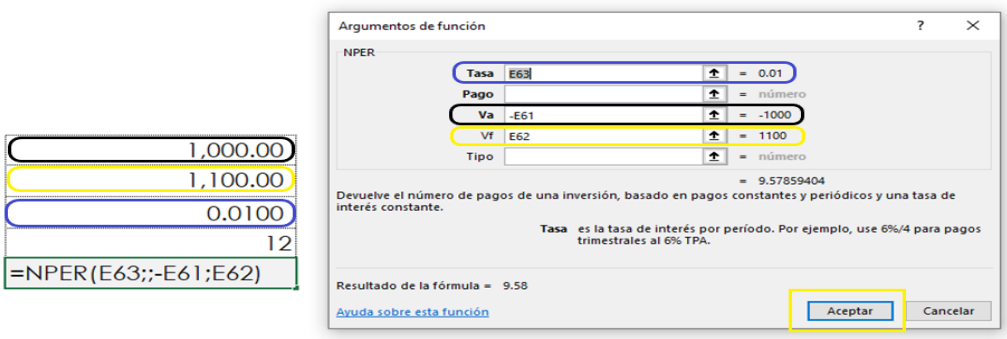
Posteriormente es necesario ubicarse en la celda frente al valor a hallar de color gris, como se observa en la tabla 3-6 de la hoja de Excel o también llamada hoja de cálculo, luego se procede a insertar función (Fx), en la opción categoría seleccionando la opción *financiera* y posteriormente dentro la lista elegir *NPER*.

Imagen 19. Función NPER



Luego aparecerá otra ventana que solicitará los datos de tasa de interés, valor actual o presente negativo y valor futuro, las demás variables por ahora no se trabajan.

Imagen 20. Función NPER variables



Luego de que se tienen las tres variables listas, se observará que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Valor futuro	1.100,00	1.100,00
Valor presente	1.000,00	1.000,00
Tasa de interés	1%	0,0100
Capitalización	Mensual	12
Tiempo	?	9,58

Respuesta: El tiempo que debe permanecer el dinero invertido es de **9,58 meses.**

Ejemplo 6

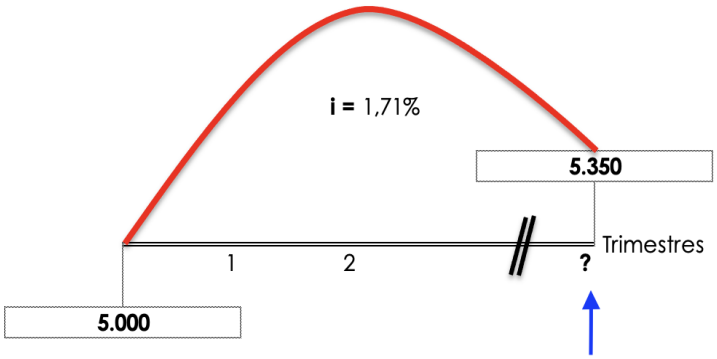
Gabriela toma un crédito por un valor de 5.000 um, el cual se compromete a cancelar de la siguiente manera: Un único pago por valor de 5.350 um, considerando que los intereses son razón del 1,706% trimestral compuesto. Determine:

¿Cuánto tiempo debe esperar el acreedor para que su dinero retorne junto con los intereses de la operación?

Desarrollo:

Vp = 5.000 Vf = 5.350 i = 0,01706 kp = Trimestral n = ?

Gráfica 3-6. Diagrama cálculo del tiempo



Fx Fórmulas

$$\mathbf{n} = \frac{\log\left(\mathbf{VF} \div \mathbf{VP}\right)}{\log\left(1 + \mathbf{i}\right)}$$

$$\mathrm{n} = \frac{\log\left(5.000 \div 5.350\right)}{\log\left(1 + 0,01706\right)}$$

$$\mathrm{n} = 4$$

Respuesta: El tiempo que debe esperar el acreedor del dinero para que Gabriela le cancele el dinero mas intereses es de **4 trimestres**, es decir, un año.

3.11 TASA DE INTERÉS

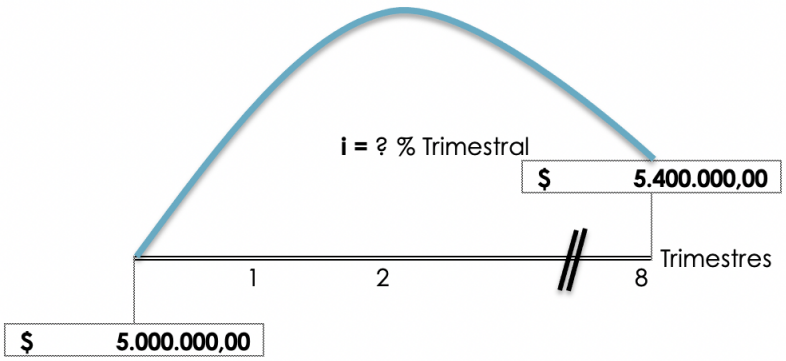
Ejemplo 7

¿Cuál es la rentabilidad trimestral que puede obtener el Sr. Calderón al invertir hoy en una entidad financiera un valor correspondiente a $5.000.000, y retirar al término de 2 años un valor de $5.400.000?

Desarrollo:

Vp = 5.000.000 Vf = 5.400.000 n = 8 Kp = Trimestral i = ?

Gráfica 3-7. Diagrama tasa de interés



Fx Fórmulas

$$i = \left(\frac{VF}{VP} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$i = \left(\frac{5.400.000}{5.000.000} \right)^{\frac{1}{8}} - 1$$

$$i = 0{,}01$$

Respuesta: La rentabilidad que un capital de 5 millones le permite generar un interés de 400.000 durante 2 años es del **1%** trimestral.

Según el método de despeje de la fórmula general de valor futuro es posible calcular la tasa de esta otra forma:

$$i = \sqrt[n]{VF \div VP} - 1$$

$$i = \sqrt[8]{5.400.000 \div 5.000.000} - 1$$

$$i = 0{,}01$$

3.12 EXCEL Fx TASA

Para el caso de la estimación de la tasa de interés es necesario plantear en una hoja de Excel la información de la siguiente manera:

Tabla 3-7. Tabla de Excel lista para aplicar función TASA

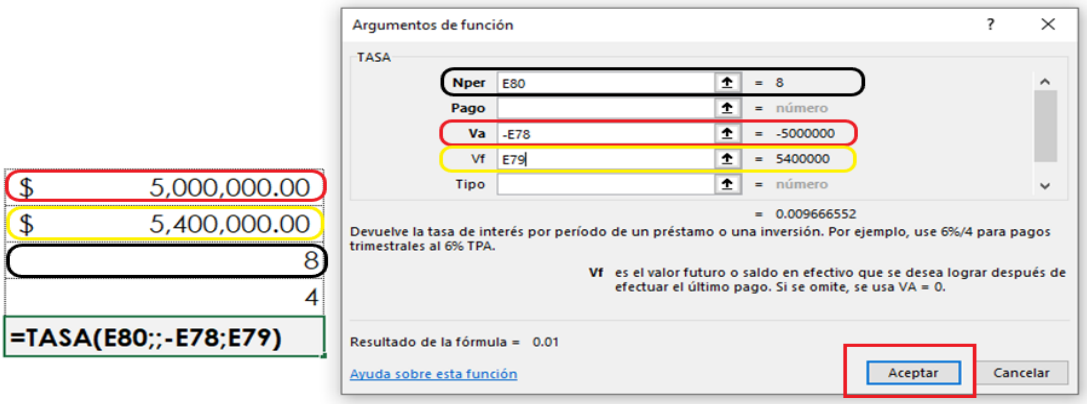
Valor presente	$5.000.000	$5.000.000
Valor futuro	$5.400.000	$5.400.000
Tiempo	2	8
Capitalización	Trimestral	4
Tasa de interés	?	

Luego de ubicarse en la celda frente al valor a hallar de color gris, como se observa en la tabla de la hoja de Excel o también llamada hoja de cálculo, se debe insertar función (Fx), en la opción *categoría* se elige *financiera* y posteriormente dentro la lista seleccionar *TASA*.

Luego aparecerá otra ventana que solicitará los datos de tiempo, valor actual o presente (negativo) y después el valor futuro; las demás variables por ahora no se utilizarán.

Ver cómo es esto:

Imagen 21. Función TASA - variables

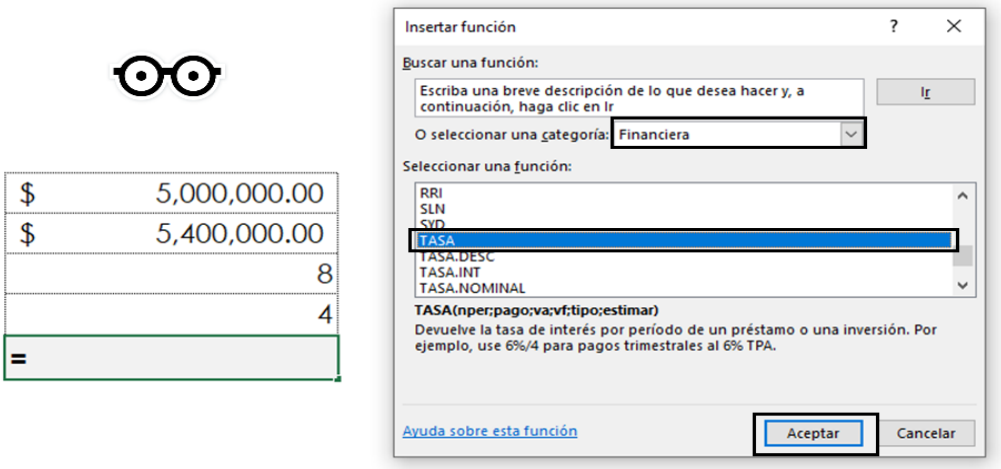


Posteriormente de contar con las tres variables listas, se encuentra que el resultado ya aparece previsualizado en la ventana. Por último, pulsar en *Aceptar*.

Valor presente	$5.000.000	$5.000.000
Valor futuro	$5.400.000	$5.400.000
Tiempo	2	8
Capitalización	Trimestral	4
Tasa de interés	?	0,01

Respuesta: La tasa de rendimiento del dinero invertido es del **1% trimestral.**

Imagen 22. Función TASA



PROBLEMAS

1. Se necesita determinar el VF que se retiraría dentro de 4 años, sí hoy se invierte 2.000 USD al 10% anual y los intereses se capitalizan cada bimestre. **Respuesta: 2.974 USD**

2. Realizar un caso con las variables dadas y resolver: i= 12%a, vf = $120.000, n = 4 años, kp = 12, vp = ?

3. Desarrollar un caso con las variables dadas y resolver: vf = $120.000, vp = $74.431, i = 12%a, kp = 12, n = años?

4. Una persona hoy deposita 20 millones de COP en una cuenta que paga intereses a razón del 5% durante los 15 primeros meses, luego esta tasa sube al 6% en el periodo 10 realiza un retiro para subsanar una contingencia. Si en el periodo 20 el saldo corresponde a

25.000.000 de COP, determine el valor retirado por el ahorrador en el periodo 10, Retiro = 17.940.484

5. Desarrollar un caso con las variables dadas y resolver: Vp = $74.431, n = 4 años, kp = 12, vf = $120.000, i = ?%a

6. Realizar un caso con las variables dadas y resolver: i = 13,5%a, vf = $1.500.000, n = 2 años, kp = 6, vp = ?

7. Desarrollar un caso con las variables dadas y resolver: vf = $1.500.000, vp = $1.148.501,21, i = 13,5%a, kp = 6, n = años?

8. Desarrollar un caso con las variables dadas y resolver: Vp = $470.000, n = 1,5 años, kp = 2, vf = $500.000, i = ?%a

9. Un capital se transformó en $ 45.600 en dos trimestres, si se aplicó un 1,19% mensual, ¿cuál fue el capital inicial y el interés ganado por el inversionista? **Respuesta: $ 45.330**

4. Tasas de interés

"Se define como el valor relativo o porcentual aplicado a un capital por un periodo de tiempo, con el fin de establecer el rendimiento o coste financiero del dinero"

4.1 OBJETIVO

Fortalecer los conocimientos en Matemáticas Financieras y conocer sus aplicaciones e importancia en la vida del ser humano en cuanto a sus actividades económicas y financieras, a través de herramientas como las tasas de interés (efectivas, nominales y periódicas). (Meza, 2017)

Pregunta: ¿Por qué son importantes las tasas de interés en términos de rentabilidad, a la hora de determinar el costo del dinero?

4.2 TASAS DE INTERÉS

Como las tasas de interés son valores relativos aplicados a un capital considerando el tiempo o la duración de la operación financiera, se puede determinar un interés para ganar o pagar. En el manejo de inversiones y financiaciones, éstas, tienen un papel muy importante al tomar una decisión en términos financieros (Agudelo & Fernández, 2019).

Por otra parte, el interés compuesto dio origen a una serie de tasas muy utilizadas en el desarrollo de problemas financieros, dentro de las cuales se obtienen las tasas periódicas, nominales y las tasas efectivas o reales.

Diferencias entre tasas

Periódica	Nominal	Efectiva
Tienen un periodo de capitalización y tipo de vencimiento. Estas son aplicadas en todos los procesos matemáticos para dar solución de casos financieros.	Son la suma de las periódicas en un año. Son anuales, pero su valor es menor que las efectivas. Tienen periodo de capitalización y tipo de vencimiento.	Son de referencia. Son anuales. No se dividen. Son mayores a las nominales.

Finalmente, se debe tener en cuenta que las tasas de interés tienen un marco referencial y este es el año.

4.3 TASAS PERIÓDICAS

Una tasa de interés periódica es aquella que es aplicada en un periodo determinado para el cálculo de intereses o rendimientos, algunos financieros la llaman o definen como tasa efectiva periódica ya que efectivamente es la que se le aplica a un capital para establecer el interés o rendimiento en un momento dado.

Cuando se habla de un periodo se hace referencia al espacio comprendido desde que se genera el hecho económico hasta cuando se determina el interés que este generó, es decir, que los periodos van relacionados con la capitalización cuando la entidad financiera liquida intereses: estos pueden ser anuales, semestrales, cuatrimestrales, trimestrales, bimestrales, mensuales, quincenales, semanales, diarios y, en casos como el sistema financiero informal, hasta en horas. (Triana, 2021)

Las tasas periódicas tienen como característica un periodo de capitalización y un tipo, el cual puede ser vencido o anticipado; estos son referidos en el valor relativo. Para una mejor comprensión, ahora se verán algunos ejemplos:

El **1% mes vencido** es una tasa periódica que será aplicada al pago de intereses por un mes y se hace una vez termine el periodo, también se puede denotar de la siguiente manera: **1%mv.**

El **2,5%tv** refleja que se pagan o cobran intereses una vez termine el trimestre.

El **1%ma** es una tasa periódica que refleja que los intereses serán cobrados al inicio del mes, dado que es una tasa de mes anticipado.

En el sector es muy dado que se apliquen tasas vencidas a pagos anticipados, de hecho, algo que refuerza el postulado es que Excel no maneja tasas anticipadas.

Para nomenclatura o identificación de una tasa periódica se utilizará las siguientes letras: **(ip)**

4.4 TASAS NOMINALES

Las tasas de interés nominal son aquellas que se identifican por ser el producto de las tasas periódicas en un año, esto significa que tienen una representación anual y, al igual que las periódicas, poseen un tipo y periodo de capitalización. (Triana, 2021)

Las tasas nominales como son anuales reflejan desde la teoría el valor rentado o cobrado por un capital en un año, se dice que esto es en papel o teoría, ya que al elaborar una tabla de amortización el resultado es otro y es cuando se crea otra tasa de interés que es la real o efectiva, de la cual más adelante se le dará mayor aclaración.

Para nomenclatura o identificación de una tasa nominal se utilizará la siguiente letra: **(J)**

Por lo anterior, es claro afirmar que una tasa nominal tiene como características ser anual y poseer un tipo y periodo de capitalización, para ello ver algunos ejemplos:

El **12% AMV** es una tasa nominal que se leería de la siguiente manera: **12% Anual Mes Vencido.**

En teoría se puede decir que esta tasa es el producto de aplicar 12 veces el 1%mensual, así matemáticamente se afirma que la tasa nominal equivale a:

$$J = 1{,}00\% x\ 12 = 12\%$$

En consecuencia, se definen las siguientes fórmulas:

J = ip x npk en la cual npk son los periodos de capitalización.

$$iP = \frac{J}{npk}$$

4.5 TASAS EFECTIVAS

Las tasas efectivas o reales son aquellas que, como su nombre lo indica, son el resultado porcentual de intereses cobrados por una financiación o pagados por una inversión al final de un año. (Triana, 2021)

Estas tasas tienen como su indicador de tiempo el año y no tienen periodo de capitalización como las periódicas o nominales; por otro lado, no se pueden utilizar en el proceso de cálculo de intereses inferior a un año y su valor equivalente es mayor a las tasas nominales, en otras palabras, no se pueden dividir para hallar una tasa semestral o cualquier otra diferente a la anual, lo anterior dado que una vez hallada la equivalencia anual de una tasa efectiva, su valor es el mismo. (Agudelo, 2019)

Para nomenclatura o identificación de una tasa efectiva se utilizará la siguiente letra: **(i)**.

Sin embargo, es posible hacer conversiones de tasas debido a la equivalencia de tasas originadas de la fórmula de interés compuesto, como ya se había mencionado.

$$\boldsymbol{P}(1+\mathrm{i})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{P}(1+\mathrm{i})^{\boldsymbol{n}}$$

Para una mejor perspectiva de una tasa periódica, una nominal y una efectiva se desarrollará una tabla de amortización, en la cual se tendrá un capital de 10.000 um, el cálculo de intereses a razón del 1%mensual y de la cual se requiere la estimación de cada una de las tasas.

Finalmente, es importante tener en cuenta que para resolver problemas financieros donde la capitalización es inferior a un año, es necesario trabajar y operar el caso con una tasa periódica, en caso tal, que el tiempo o liquidación de intereses sea anual, es posible aplicar en el procedimiento una efectiva o real.

Tabla 4-1. Amortización para el cálculo de tasas de interés

Periodo	Capital	Tasa de interés	Interés	Saldo
1	10.000,00	1%	100,00	10.100,00
2	10.100,00	1%	101,00	10.201,00
3	10.201,00	1%	102,01	10.303,01
4	10.303,01	1%	103,03	10.406,04
5	10.000,00	1%	100,00	10.100,00
6	10.100,00	1%	101,00	10.201,00
7	10.201,00	1%	102,01	10.303,01
8	10.303,01	1%	103,03	10.406,04
9	10.000,00	1%	100,00	10.100,00

10	10.100,00	1%	101,00	10.201,00
11	10.201,00	1%	102,01	10.303,01
12	10.303,01	1%	103,03	10.406,04
TOTAL		12%	1.268,25	

La tabla 4-1 refleja el comportamiento del interés compuesto en el cual los intereses se capitalizan al final del periodo. Considerando lo anterior, se observa como periodo tras periodo la tasa del 1%se mantiene generando intereses; claro, estos cambian mes tras mes por ser compuestos.

Al final del año, las tasas (periódicas) aplicadas en cada periodo generan la tasa nominal, es decir, la del año; de esta manera, se tendrá ya dos tasas y tan solo restaría la efectiva, la cual se halla tomando la suma de los intereses y dividiéndola en el capital inicial.

Ver como es esto:

Evidentemente la tasa aplicada mes tras mes del 1%es la tasa periódica, y esta sería mes vencido.

$$ip = 1{,}00\%mv$$

La tasa nominal sería la suma de las periódicas del año o la multiplicación de ella por 12 periodos.

$$J = 12{,}00\%AMV \text{ o } 1\% x\ 12 = 12\%AMV$$

Finalmente, se determina que la tasa real o efectiva es el cociente de los intereses sobre el capital inicial.

$$i = 1.268{,}25 \div 10.000 = 0{,}1268, \text{ luego } 0{,}1268 \times 100 = 12{,}68\%EA$$

Más adelante se aclarará cómo estas tres tasas son equivalentes.

4.6 TASAS EQUIVALENTES

Son aquellas que, sin importar su clase, es decir, periódica, nominal o efectiva, representan el mismo valor en términos de interés en el año. A manera de ejemplo genérico, al buscar la fórmula equivalente al agua se tendrá que agua = H_2O, o en casos económicos la equivalencia de un dólar en términos de pesos colombianos (COP), conocida esta como la Tasa Representativa del Mercado (TRM). (Triana, 2021)

Para ello, se debe partir de la fórmula de valor futuro identificando lo que hace diferente al P del F, y este es (1+i); ver cómo hacerlo:

$$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}(1+i)^{\mathbf{n}}$$

Si se analiza la fórmula de igualdad del valor futuro se puede deducir que lo que hace igual el VP al VF es el interés, que es producto de un multiplicador (1 + i), de no ser así, VP ≠ VF

En este orden de ideas, asumiendo un mismo capital para obtener un mismo valor futuro, se haría hallando una tasa con diferente periodicidad, lo que se denominaría equivalencia. Lo anterior se representaría así:

$$(1+i)^{\mathbf{n}} = (1+\mathbf{j})^{\mathbf{m}}$$

- 1 = Constante
- i = Tasa conocida

- n = Periodo de capitalización de la tasa conocida
- J = Tasa para calcular o hallar
- m = Periodo de la tasa para calcular o hallar

Para corroborar los datos de la tabla, se observa cómo el 1%mv es equivalente al 12,68% Para ello, el interrogante sería:

¿Cuál es la tasa efectiva anual equivalente al 1%mv?

El planteamiento sería el siguiente:

$$(1+0,01)^{12} = (1+j)^{1}$$

Como la tasa para calcular es la EA, nótese que el tiempo para esta tasa es uno (1) ya que es anual; para la conocida, basta con sustituir la tasa conocida y, finalmente, 12 son los periodos mensuales en el año.

Seguidamente se despeja J.

$$(1+0,01)^{12} = (1+j)^{1}$$

$$(1+0,01)^{12} = 1+j$$

$$(1+0,01)^{12} - 1 = j$$

$$J = (1+0,01)^{12} - 1$$

$$J = 0,1268$$

Respuesta: De esta forma es ideal decir que la tasa efectiva anual equivalente al **1%mv** es **12,68%**

Generalizando, se puede establecer que la fórmula para encontrar la equivalencia de una tasa periódica a una efectiva anual es:

$$i = (1 + \mathbf{i_p})^{c} - 1 \quad \text{o, de otra forma, } i = \left(1 + \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{ñk}}\right)^{n} - 1$$

Ahora ver como realizar el ejercicio de forma inversa, así la pregunta sería:

¿Cuál es la tasa mes vencido equivalente al 12,68%EA?

Para esto el planteamiento sería:

$$(\text{üüüüü} \quad)^{1} = (\ +\ )^{12}$$

$$(1 + 0{,}1268)^{\frac{1}{12}} = \left((1 + i)^{12}\right)^{\frac{1}{12}}$$

$$(1 + 0{,}1268)^{\frac{1}{12}} = 1 + i$$

$$(1 + 0{,}1268)^{\frac{1}{12}} - 1 = i$$

$$i = (1 + 0{,}1268)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i = 0{,}01$$

Respuesta: La tasa mes vencido equivalente al 12,68%EA es del **1%**

Se puede establecer que la fórmula para encontrar la equivalencia de una tasa efectiva anual a una periódica es:

$$\mathbf{ip} = (1 + i)^{\frac{1}{n}} - 1$$

4.7 CÁLCULO DE UNA TASA PERIÓDICA

Ejemplo 1

¿Cuál es la tasa periódica trimestre vencido correspondiente al 12% ATV?

Solución:

Datos del problema:

$$J = 0{,}12 \qquad npk = 4 \qquad ip = ?$$

Fx Fórmulas

$$iP = \frac{J}{npk}$$

$$ip = \frac{0{,}12}{4}$$

$$ip = 0{,}03 \qquad 0{,}03 \times 100 = 3$$

Respuesta: La tasa trimestre vencido correspondiente o equivalente al 12% ATV es del **3%**

Ejemplo 2

¿Cuál es la tasa periódica bimestre vencido correspondiente al 12%EA?

Solución:

Datos del problema:

$i = 0{,}12 \qquad npk = 6 \qquad n = 6 \qquad ip = ?$

Fx Fórmulas

$$ip = [1 + i]^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$ip = [1 + 0{,}12]^{\frac{1}{6}} - 1$$

$$ip = 0{,}019067623$$

$$0{,}019067623 \times 100 = 1{,}91\%bv$$

Respuesta: La tasa periódica bimestre vencido correspondiente al 12%EA es **1,91%**

La solución mediante la otra fórmula, la cual depende del método matemático aplicado, sería de la siguiente forma:

Fx Fórmulas

$$ip = \sqrt[n]{(1 + i)} - 1$$

$$iP = \sqrt[6]{(1 + 0{,}12)} - 1$$

$$ip = 0{,}019067623$$

$$0{,}019067623 \times 100 = 1{,}91\%bv$$

Como se evidencia, el resultado es el mismo.

4.8 CÁLCULO DE UNA TASA NOMINAL

Ejemplo 3

¿Cuál es la tasa nominal trimestre vencido correspondiente a 12,6%EA?

Solución:

Datos del problema:

$i = 0{,}126 \qquad npk = 4 \qquad n = 4 \qquad j = ?$

En este caso, el procedimiento es hallar la tasa periódica y posteriormente la nominal.

Fx Fórmulas

$$\mathbf{ip} = \left[1 + \mathrm{i}\right]^{\frac{1}{\mathbf{n}}} - 1$$

$$\mathrm{ip} = \left[1 + 0{,}126\right]^{\frac{1}{4}} - 1$$

ip = 0,030112358, luego aplicar $\mathbf{J = ip \times npk}$

j = 0,030112358 x 4 = 0,120449434 x 100

J = 12,04%ATV

Uniendo las dos fórmulas se tendrá lo siguiente:

$$\mathbf{j} = \left[\left(1 + \mathrm{i}\right)^{\frac{1}{\mathbf{n}}} - 1\right] \cdot \mathbf{npk}$$

Respuesta: La tasa nominal anual trimestre vencido correspondiente o equivalente al 12,6% es del **12,04%**

4.9 TASA NOMINAL EN EXCEL

Ejemplo 4

Ver cómo el caso anterior es resuelto mediante una función de Excel.

¿Cuál es la tasa nominal trimestre vencido correspondiente a 12,6%EA?

Solución:

Datos del problema:

$$i = 0{,}126 \qquad npk = 4 \qquad n = 4 \qquad j = ?$$

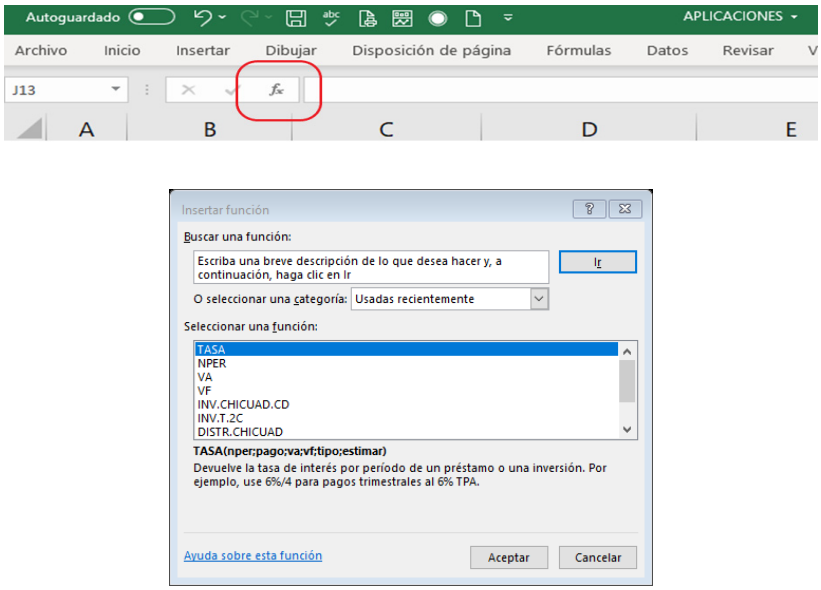
Para lo cual, se necesita abrir un libro de Excel y en una hoja elaborar una tabla que contenga la tasa efectiva y los números de periodos en el año, donde se refleje cuando se capitaliza la tasa nominal y así poder calcularla. Lo anterior se verá así:

Tabla 4-2. Tasa nominal en Excel

Tasa efectiva	12,6%
Periodos de capitalización	4
Tasa nominal	

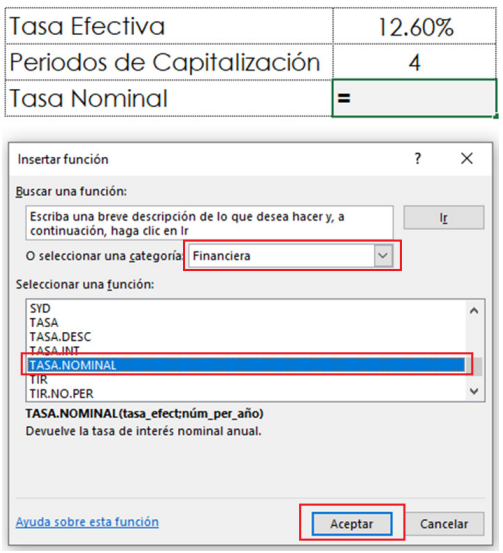
Luego es necesario ubicarse en la celda gris en la cual se hallará la tasa, seguidamente ir a insertar la función.

Imagen 23. Insertar Función



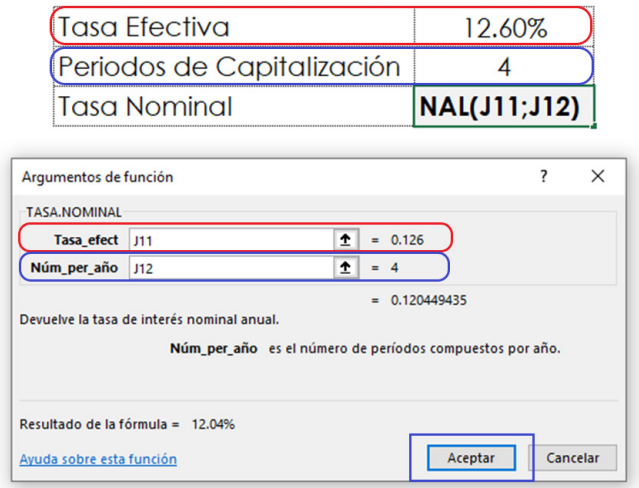
Después de desplegar en la opción categoría, elegir financiera y en esas opciones en la lista seleccionar *TASA.NOMINAL*.

Imagen 24. Función TASA.NOMINAL



Posteriormente, se abrirá otra ventana que solicitará las dos variables que ya están en la tabla como son la tasa efectiva y los periodos de capitalización; por último, dar clic en *Aceptar*.

Imagen 25. Función TASA.NOMINAL variables



Tasa efectiva	12,6%
Periodos de capitalización	4
Tasa nominal	12,04%

Como se puede corroborar, el resultado obtenido con la fórmula es el mismo que con la función.

Respuesta: La tasa nominal ATV equivalente al 12,6%EA es del **12,04%**

Para tener en cuenta: *Excel no calcula tasas periódicas y tampoco tasas anticipadas.*

4.10 CÁLCULO DE UNA TASA EFECTIVA

Ejemplo 5

Las entidades financieras son muy dadas en presentar esta tasa al ofertar algún tipo de producto de inversión. Como la tasa real es más alta que la tasa nominal, lo que resulta atractivo para un posible cliente, pero en casos como la financiación no es muy usual revelarla, por ello es indispensable conocerla y poder tomar una mejor opción o decisión. Por lo anterior, determine:

¿Cuál es la tasa efectiva que se cobrará realmente por un crédito que cobra interés al 1,3%mes vencido?

Solución:

Datos del problema:

ip = 0,013 npk = 12 n = 12 i = ?

Fx Fórmulas

$$i = (1 + i_p)^c - 1$$

$$i = (1 + 0,013)^{12} - 1$$

$$i = 0,167651776$$

$$0,167651776 \times 100 = 16,77\%$$

Respuesta: La tasa efectiva anual equivalente al 1,3%mv es **16,77%**

4.11 TASA EFECTIVA EN EXCEL

Ejemplo 6

¿Cuál es la tasa efectiva que se cobrará realmente por un crédito que tiene un interés al 1,3% mes vencido?

Solución:

Datos del problema:

Hay que recordar que Excel no trabaja tasas periódicas, por ende, se debe calcular la tasa nominal multiplicando por el npk.

$$ip = 0{,}013 \times 12 = 0{,}156 \qquad npk = 12 \qquad n = 12 \qquad i = ?$$

Para lo cual es necesario abrir un libro de Excel y en una hoja elaborar una tabla que contenga la tasa efectiva y los números de periodos en el año en que se capitaliza la tasa nominal para calcular.

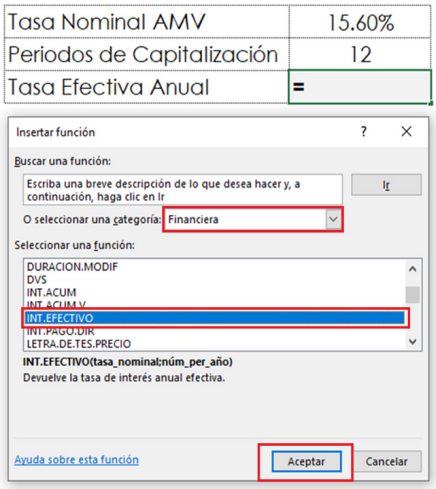
Ver a continuación como sería.

Tabla 4-3. Tasa efectiva en Excel

Tasa periódica	15,6%
Periodos de capitalización	12
Tasa efectiva anual	

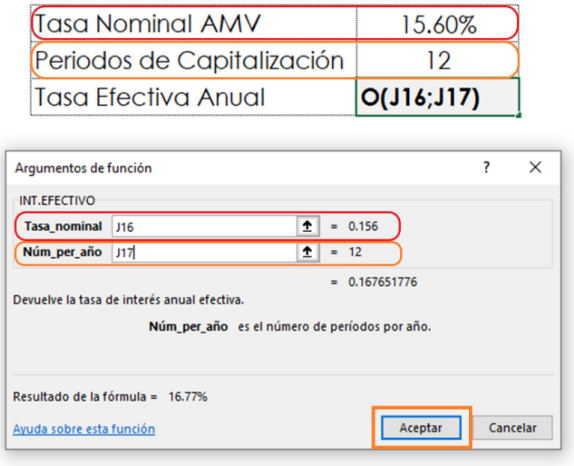
Luego de desplegar en la opción categoría, elegir financiera y en esas opciones en la lista seleccionar INT.EFECTIVO

Imagen 26. Función INT.EFECTIVO



Posteriormente, se abrirá otra ventana que solicitará las dos variables que ya están en la tabla como son: la tasa efectiva y los periodos de capitalización; finalmente, dar clic en *Aceptar*.

Imagen 27. Función INT.EFECTIVO variables



Tasa Nominal AMV	15,6%
Periodos de capitalización	12
Tasa efectiva anual	16,77%

Respuesta: La tasa efectiva equivalente al 15,6%AMV es del **16,77%**

4.12 TASAS COMBINADAS

Son el producto de al menos una tasa variable y una fija, en el cual las tasas variables, como su nombre lo indica, cambian frecuentemente en determinado tiempo y las tasas fijas son denominadas spread o puntos efectivos. (Triana, 2021)

Algunas tasas variables en Colombia son la inflación, la devaluación, la DTF, la TCC y la TBS.

La DTF es una tasa de captación la cual mide el promedio de los depósitos a término a 90 días de todo el sistema financiero, muy utilizada en créditos blandos por bancos de segundo nivel y del Estado. La DTF es de naturaleza Anual Trimestre Anticipada (ATA).

Por su parte, la TCC mide el promedio de captación de los bancos y de las corporaciones financieras de CDT a 90 días.

Y la TBS mide el promedio de las tasas de los bancos con plazo hasta de un año.

El spread en algunos mercados financieros es la diferencia entre el precio de compra y el de venta, para este caso se toma como la tasa pasiva o fija de un contrato de mutuo o préstamos; estos se dan en puntos efectivos.

Fx Fórmulas

$$\mathbf{TC} = (1+\mathbf{i}_1)(1+\mathbf{i}_2)(1+\mathbf{i}_n)-1$$

Ejemplo 7

El banco agropecuario coloca en el mercado un producto con una tasa de interés DTF + 2 puntos, teniendo en cuenta una DTF del 4,3%ATA.

¿Cuál es la tasa efectiva equivalente al préstamo ofertado?

Solución:

Los datos del caso son:

$$J = 0{,}0430 \qquad npk = 4 \qquad Sp = 2 \qquad i = ?$$

Teniendo en consideración que en este caso se cuenta con una tasa anticipada, es necesario utilizar la forma de equivalencias, salvo con una variación en los signos para la tasa anticipada, es decir, cambiar + por -. Ver como es el planteamiento.

Planteamiento para conversión de una tasa efectiva del 4,42% a una periódica:

$$(1+\mathbf{i})^{\mathbf{n}} = (1-\mathbf{j})^{-\mathbf{m}}$$

$$(1+0{,}0442) = (1-\mathbf{J})^{-4}$$

$$(1+0{,}0442)^{-\frac{1}{4}} = 1-\mathbf{J}$$

$$(1+0,0442)^{-\frac{1}{4}}-1=-\mathbf{J}$$

$$\mathbf{J}=1-(1+0,0442)^{-\frac{1}{4}}$$

Hasta ahora se ha calculado la tasa periódica anticipada, de la cual resulta esta fórmula general:

$$\mathbf{iP}=1-(1+\mathrm{i})^{-\frac{1}{\mathbf{n}}}$$

Y la tasa nominal sería: $\mathbf{J}=\left[1-(1+\mathrm{i})^{-\frac{1}{\mathbf{n}}}\right]\cdot\mathbf{n}$

Planteamiento para conversión de una tasa periódica $\frac{0,043}{4}$ a una efectiva:

$$(1-\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}=(1+\mathbf{j})^{\mathbf{m}}$$

$$\left(1-\frac{0,043}{4}\right)^{-4}=(1+\mathrm{i})$$

$$\left(1-\frac{0,043}{4}\right)^{-4}-1=\mathrm{j}$$

$$\mathrm{J}=\left(1-\frac{0,043}{4}\right)^{-4}-1$$

$$\mathrm{J}=0,044180946$$

Fórmula general: $\mathrm{i}=\left(1-\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{npk}}\right)^{-\mathbf{n}}-1$

Como en este caso se referenciaba una tasa ATA, esta equivale al 4,42%EA.

Finalmente, es posible establecer la tasa combinada:

$$TC = (1+DTF(ea))\ (1+0{,}02) - 1$$

$$TC = (1 + 0{,}0442)\ (1 + 0{,}02)\ -1$$

$$TC = 0{,}0650840 \text{ x } 100 = 6{,}51\%$$

Respuesta: La tasa efectiva anual del producto financiero ofertado por el banco agrario corresponde al **6,51%**

4.13 INFLACIÓN

La inflación es el incremento paulatino y constante de los precios de los productos básicos de la canasta familiar de una economía en un periodo determinado (Banco de la República, 2020).

Esta medida es calculada con base en el Índice de Precios al Consumidor (IPC).

Fx Fórmulas

$$\mathbf{INF} = \frac{\mathbf{IPC_n} - \mathbf{IPC_{n-1}}}{\mathbf{IPC_{n-1}}} \text{ x } 100$$

En la cual,

- INF = inflación
- IPC_n = IPC del periodo actual
- IPC_{n-1} = IPC de un periodo anterior.

Ejemplo 8

Determinar el nivel de inflación del año 2020 y lo corrido del 2021 con base en la siguiente información:

Tabla 4-4. Índices de precios al consumidor

Año(aaaa)-Mes(mm)	Índice
2019-12	103,80
2020-01	104,24
2020-02	104,94
2020-03	105,53
2020-04	105,70
2020-05	105,36
2020-06	104,97
2020-07	104,97
2020-08	104,96
2020-09	105,29
2020-10	105,23
2020-11	105,08
2020-12	105,48
2021-01	105,91
2021-02	106,58
2021-03	107,12
2021-04	107,76
2021-05	108,84
2021-06	108,78
2021-07	109,14
2021-08	109,62

Fuente: Banco de la República - Gerencia Técnica - información extraída de la bodega de datos -Serankua- el 13/09/2021 15:32:43

Solución: Enero de 2020.

$$\text{IPC diciembre} = 103.80 \quad \text{IPC Enero} = 104.24 \quad \text{INF Enero} = ?$$

$$\text{INF enero} = \frac{(104.24 - 103.80)}{103.80} \times 100$$

$$\text{INF enero} = 0{,}42\%$$

De acuerdo con el procedimiento anterior, con diciembre de 2019 el resultado para los demás periodos sería:

Tabla 4-5. Inflación mes a mes de 2020 - 2021

Año (aaaa)-Mes (mm)	Índice	INF mensual
2020-01	104,24	0,42%
2020-02	104,94	0,67%
2020-03	105,53	0,56%
2020-04	105,70	0,16%
2020-05	105,36	-0,32%
2020-06	104,97	-0,37%
2020-07	104,97	0,00%
2020-08	104,96	-0,01%
2020-09	105,29	0,31%
2020-10	105,23	-0,06%
2020-11	105,08	-0,14%
2020-12	105,48	0,38%
2021-01	105,91	0,41%
2021-02	106,58	0,63%
2021-03	107,12	0,51%
2021-04	107,76	0,60%
2021-05	108,84	1,00%
2021-06	108,78	-0,06%
2021-07	109,14	0,33%

Fuente: Elaboración propia. Recuperado de Banco de la República - Gerencia Técnica - información extraída de la bodega de datos -Serankua- el 13/09/2021 15:32:43

PROBLEMAS

1. Determinar la tasa anual efectiva de:

Capitalización	# de Pdos	Nominal	TEA
Anual	1	12%	12,00%
Semestral	2	12%	12,36%
Cuatrimestral	3	12%	
Trimestral	4	12%	
Bimestral	6	12%	
Mensual	12	12%	

2. Determinar la tasa periódica de:

Capitalización	# de Pdos	Nominal	ip
Anual	1	12,68%	1,00%
Semestral	2	12,68%	6,15%
Cuatrimestral	3	12,68%	
Trimestral	4	12,68%	
Bimestral	6	12,68%	
Mensual	12	12,68%	

3. Un artículo es fabricado en Colombia y cuesta 80.000 COP, a la fecha la TRM es de USD 1 = 4.000 COP. Suponiendo que el IPP del sector en el país es del 20%y que la devaluación del peso frente al dólar sea del 15% hallar el precio del mismo artículo en cada país al final de un año.

4. Se constituye un CDT a 3 meses por $650.000, con una tasa del 26%ATV. Teniendo en cuenta que la retención en la fuente es de 4% determinar:

   a) La rentabilidad antes de impuestos.

   b) La rentabilidad después de impuestos.

   c) El valor que le entregan al vencimiento.

   d) Suponiendo una inflación del 8%establecer la tasa real obtenida.

   Para tener en cuenta a la hora de deflactar una tasa efectiva vs. inflación:

   $$(1 + ir)(1+ m) = (1+ in)$$ donde: ir = Tasa real, m = Inflación e in = Tasa de interés

5. Un labriego desea conocer la tasa que el banco le cobrará por un crédito que colocó en las siguientes condiciones: DTF + 1,5 puntos, considerando una DTF a la fecha de 4,43%ATA.
6. Un inversionista desea obtener una rentabilidad real del 10% ¿A qué tasa debe invertir suponiendo que la inflación va a ser del 5%

5. Anualidades

"Se definen como una serie de pagos uniformes o de igual valor, donde estos pueden ser, ingresos o egresos"

5.1 OBJETIVO

Fortalecer los conocimientos en Matemáticas Financieras y conocer sus aplicaciones e importancia en la vida del ser humano en cuanto a sus actividades económicas y financieras, a través de herramientas como las anualidades o pagos uniformes. (Triana, 2021)

PREGUNTA: ¿Por qué es importante la utilización de las anualidades en el mercado real?

5.2 DEFINICIÓN

Una anualidad es un flujo de caja con montos de dinero uniformes, es decir, todos los flujos son iguales y los movimientos de capitales ocurren a intervalos regulares. La circulación monetaria es por medio de pagos de la anualidad (Yepes, 2017).

Las anualidades no siempre están referidas a periodos anuales de pago. Las fórmulas de las anualidades permiten desplazar en el tiempo un grupo de capitales a la vez. (Triana, 2021)

Algunos ejemplos de anualidades

- Los pagos mensuales por renta.
- El cobro quincenal o semanal de sueldos.
- Los abonos mensuales a una cuenta de crédito.
- Los pagos anuales de primas de pólizas de seguro de vida.

Los principales elementos que conforman las anualidades

- **A:** Pago periódico llamado también renta. Es el importe cobrado o pagado, según sea el caso, en cada periodo y que no cambia en el transcurso de la anualidad.
- **F:** El valor futuro viene a ser la suma de todos los pagos periódicos (A) capitalizados al final del enésimo periodo.
- **P:** El valor actual o presente viene a ser la suma de todos los pagos periódicos (A) descontados o actualizados a una tasa de interés.
- **ip:** Es la tasa de interés por periodo y tiene la característica de ser simultáneamente nominal y efectiva. También representa la tasa efectiva anual (TEA).
- **n:** Obtenemos el número de periodos multiplicando el tiempo por la frecuencia de capitalización de los intereses (n = n en años * npk).
- **K:** Periodos de gracia. Tiempos cuando no se efectúan pagos.
- **Kp:** Capitalización, la cual se refiere al momento cuando las entidades liquidan el interés.

Una anualidad es una serie de pagos que cumple con las siguientes condiciones:

1. Todos los pagos son de igual valor.
2. Todos los pagos se hacen a iguales intervalos de tiempo.
3. Todos los pagos son llevados al principio o al final de la serie a la misma tasa.
4. El número de pagos debe ser igual al número de periodos.

Tipos de anualidades

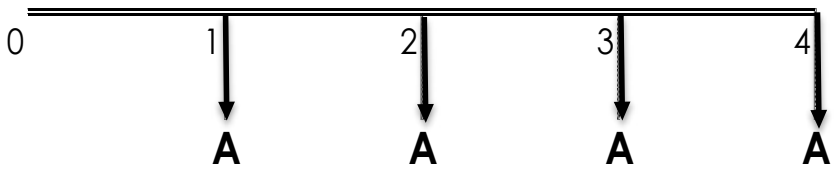
Ordinaria o vencida, anticipada, diferida y perpetua.

5.3 ANUALIDADES ORDINARIAS O VENCIDAS

Son aquellas en las cuales los pagos se hacen al final de cada periodo, por ejemplo, el pago de salarios a los empleados, ya que primero se realiza el trabajo y luego se hace el pago. (Triana, 2021)

Lo anterior se representa así:

Imagen 27. Diagrama anualidad vencida



Ver algunos casos de aplicación de anualidades vencidas:

Ejemplo 1

Para esto se tiene el siguiente caso: determinar el valor futuro de un ahorro programado en el cual una persona destina 500.000 COP para ser consignados al final de cada mes durante 3 años, teniendo en cuenta que la entidad financiera paga intereses a razón del 4,68%EA con capitalización mes vencido.

Solución:

Antes de solucionar, se debe leer con atención y recordar la teoría de una anualidad y determinar de qué tipo es. En el caso planteado es una anualidad ordinaria o vencida y se pide establecer el valor futuro, es decir que debe utilizar la siguiente fórmula:

Fx Fórmulas

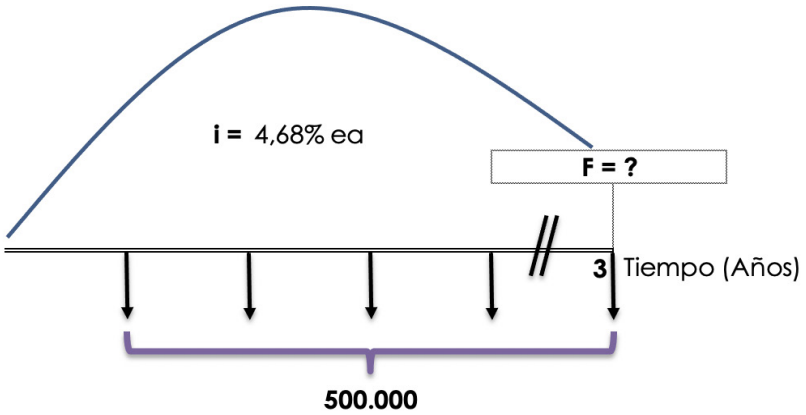
$$\mathbf{F = A}\left|\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right|$$

Luego se debe identificar las variables:

F = ? n = 3 años kp = mv A = 500.000 i = 4,68%EA

Tras ello, se debe realizar el diagrama de flujo o flujo de caja, el cual quedaría de la siguiente manera:

Gráfica 5-1. Diagrama anualidad vencida



Una vez se cuenta con la información, lo que sigue es determinar cuál es la capitalización y hallar su equivalencia en la tasa de interés y el tiempo. Como la capitalización es mes vencido, esto debe estar establecido en meses.

$$F = ? \qquad kp = mv \qquad A = 500.000 \qquad n = 3 \text{ años} \qquad i = 4{,}68\%EA$$

Para los años a meses se multiplica el tiempo en años por los periodos de capitalización, de esta forma:

$$n = 3 \text{ años} = \qquad n \times npk = \quad 3 \times 12 = 36$$

Para la tasa de interés se aplica la forma de equivalencia

$$ip = [1 + i]^{\frac{1}{n}} - 1$$

No se debe olvidar trabajar las tasas en decimales, de esta forma se tendrá lo siguiente:

$$i = 4{,}68\% \; = \qquad ip = [1 + 0{,}0468]^{\frac{1}{12}} - 1 \; = \; 0{,}00381876394189$$

Finalmente, se sustituye en la fórmula elegida:

$$F = 500.000 \left| \frac{(1 + 0{,}00381876394189)^{36} - 1}{0{,}00381876394189} \right|$$

$$F = 500.000 \times ((1+ 0.00381876394189)\text{^}36 -1) \div 0.00381876394189)$$

Calculadora

$$F = \$ \; 19.256.652{,}87$$

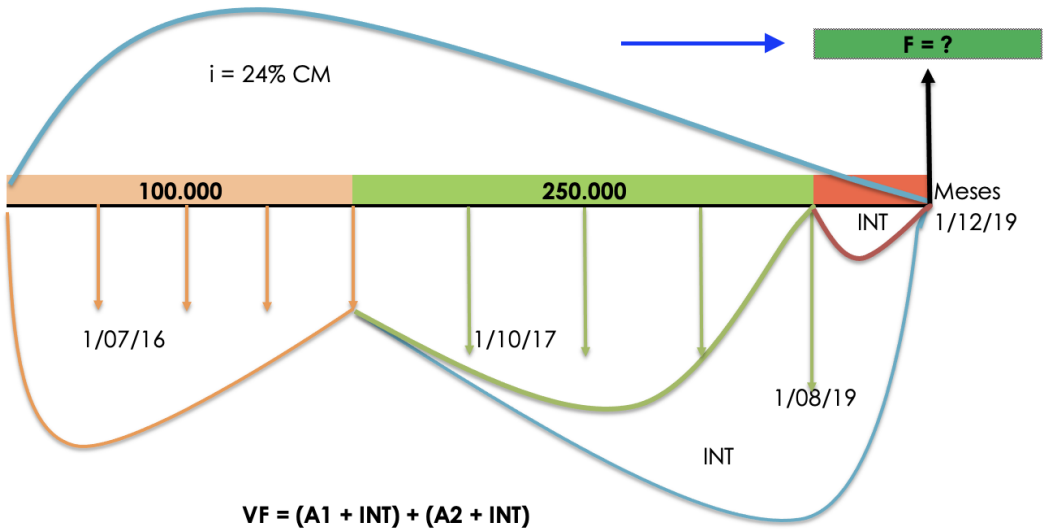
Respuesta: El valor futuro de ahorrar 500.000 COP durante 3 años a una tasa del 4,68%EA con capitalización mensual es de **19.256.652,87 COP.**

Ejemplo 2

Una persona inicia el 1 de julio de 2016 a hacer depósitos mensuales de $ 100.000 el día primero de cada mes. Estos depósitos son efectuados en una entidad financiera que paga el 24%CM o AMV, pero a partir del 1 de octubre de 2017 decidió que sus depósitos serían de $ 250.000. El último depósito lo hizo el 1 de agosto de 2019. Si el 1 de diciembre de 2019 decide pagar la cuenta, ¿cuál será el monto de sus ahorros?

Para dar solución a este problema es indispensable realizar primero que todo el diagrama, el cual quedaría de la siguiente forma:

Gráfica 5-2. Diagrama de dos anualidades vencidas



El diagrama muestra el proceso para llevar a cabo en el cual existen dos anualidades y unos tiempos cuando ese ahorro gana intereses, quiere decir que hay que hallar el F de cada anualidad y luego el VF, para al final sumarlas y encontrar el valor de $ 10.757.468,68.

Posteriormente, se deben hallar los valores de la primea anualidad. Para determinar el tiempo, se toman las fechas y se establece los meses restando de la fecha final la inicial de la anualidad.

DD	MM	AAAA
01	09	2017
01	06	2016
-	03	1

- 3 + 12 =15 meses

F	?
A	100.000,00
i	0,02
n	15

$$i = 0,12 \div 12$$

Fx Fórmulas

$$\mathbf{F = A}\left|\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right|$$

$$F = 100.000\left|\frac{(1+0,02)^{15}-1}{0,02}\right|$$

$$F = \quad 1.729.41,69$$

Una vez se ha calculado el valor de la anualidad, se halla el valor futuro del interés hasta el cierre de la cuenta, para esto se toma el F de la anualidad como Vp.

DD	MM	AAAA
01	12	2019
01	09	2017
-	03	2

- 3 + 24 =27 meses

$$\mathbf{VF = VP(1+i)^n} = \quad 1.729.341,69\ (1 + 0,02)^{27} = \quad 2.951.789,95$$

Al igual que para la primera anualidad, se sigue el mismo procedimiento para la siguiente.

DD	MM	AAAA
01	08	2019
01	09	2017
-	-1	2

- -1 + 24 =23 meses

F	?
A	250,000.00
i	0,02
n	23

$$F = 250.000 \left| \frac{(1+0,02)^{23} - 1}{0,02} \right|$$

$$F = 7.211.240,80$$

Una vez se ha calculado el valor de la anualidad, se halla el valor futuro del interés hasta el cierre de la cuenta, para esto se toma el F de la anualidad como Vp.

DD	MM	AAAA
01	12	2019
01	08	2019
-	04	-

- 4 + - =4 meses

VF = 7.211.240,80 (1 + 0,02)^4 = **7.805.678,96**

Finalmente, se suman los dos valores según se evidencia en el diagrama de flujo.

F = (Anualidad 1 + Intereses) + (Anualidad 2 + Intereses)

F = 2.951.789,95 + 7.805.678,96 = 10.757.468,90

Respuesta: El valor acumulado por las dos anualidades al final del 01-12-2019 es de **$10.757.468,90.**

Ejemplo 3

Un comerciante ahorra 500 euros al final de cada pago de sus obligaciones laborales, es decir, cada mes. Si la entidad donde deposita su dinero paga intereses a razón del 5%EA.

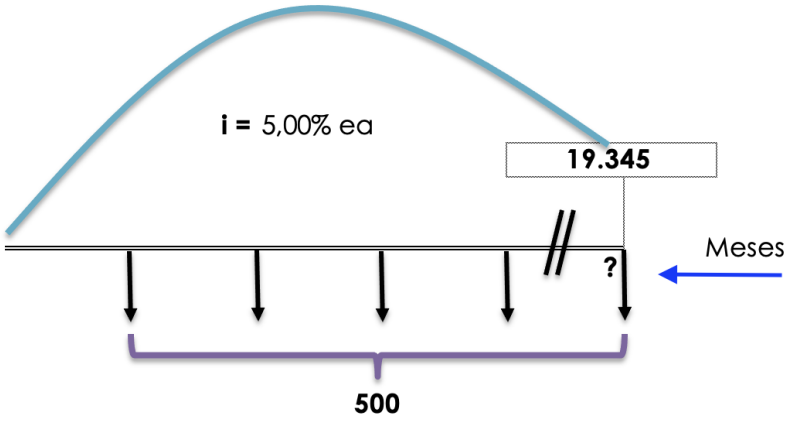
¿Cuánto tiempo debe esperar para tener ahorrados 19.345 euros?

Solución:

Los datos del problema son:

$$i = 0{,}0500 \qquad kp = 12 \qquad F = 19.345 \qquad A = 500$$
$$n = ?$$

Gráfica 5-3. Flujo de Caja - tiempo anualidad vencida



$$ip = \sqrt[12]{(1+0{,}05)} - 1$$

$$ip = 0{,}00407412378$$

Fx Fórmulas

$$\mathbf{n} = \frac{\log\left(\frac{\mathbf{Fi}}{\mathbf{A}} + 1\right)}{\log(1+\mathrm{i})}$$

$$\mathrm{n} = \frac{\log\left(\frac{19.345\ \mathrm{x}0,00407412378}{500} + 1\right)}{\log(1+0,00407412378)}$$

$$\mathrm{n} = 36$$

Respuesta: El comerciante debe esperar **36** meses para alcanzar su objetivo de ahorro.

Ejemplo 4

Un terreno que tiene un valor actual de 70 millones de COP, éste, se propone comprar con un pago inicial del 20%y 25 cuotas mensuales iguales con una tasa de interés del 1%mensual. Por lo anterior determine:

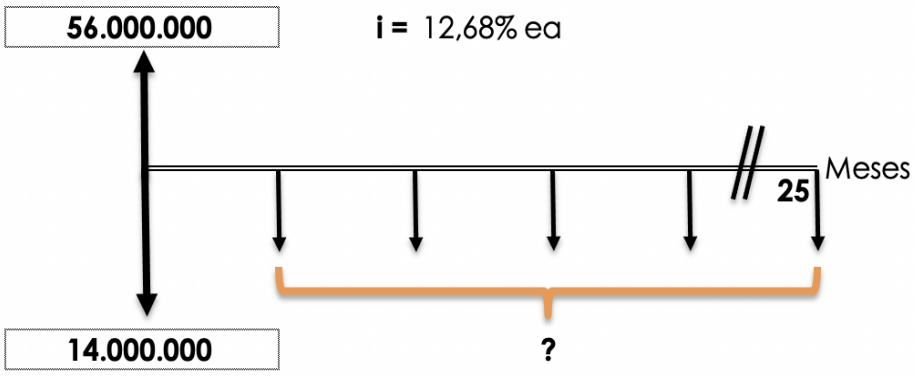
¿Cuál sería el valor de las cuotas?

Solución:

Los datos del problema son:

ip = 0,01 k = 12 P = 56.000.000 PCI = 14.000.000 n = 25 A = ?

Gráfica 5-4. Diagrama pago del terreno.



Fx Fórmulas

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \div \left| \frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathrm{i}} \right|$$

$$\mathrm{A} = 56.000.000 \div \left| \frac{1-(1+0,01)^{-25}}{0,01} \right|$$

$$\mathrm{A} = 2.542.719$$

Respuesta: El valor de cada pago mensual para cancelar el 80%del valor del terreno equivale a 2.542.719.

5.4 ANUALIDADES VENCIDAS Fx EXCEL

Ejemplo 5

Un comerciante ahorra 1.000.000 al final de cada pago del impuesto del IVA, es decir, cada dos meses; si la entidad donde deposita su dinero paga intereses a razón del 4%EA.

¿Cuánto tiempo debe esperar para tener ahorrado 25.900.192?

Solución:

Los datos del problema son:

$$i = 0{,}04 \qquad k = 6 \qquad F = 25.900.192 \qquad A = 1.000.000$$
$$n = ?$$

Teniendo en cuenta que la capitalización es bimestral, las variables tiempo y tasa deben estar en la misma medida. Como se ha desarrollado el proceso de cómo convertir una tasa efectiva a una periódica, se puede hacer mediante la fórmula o función de Excel, y el tiempo que está en años se multiplica por la capitalización, de esta manera se tendrá lo siguiente:

$$ip = (1+0{,}04)^{\frac{1}{6}} - 1 \quad = 0{,}00655819694 \qquad npk = 6 \text{ x } 6 = 36$$

$$F = 25.900.192 \qquad A = 1.000.000 \qquad n = ?$$

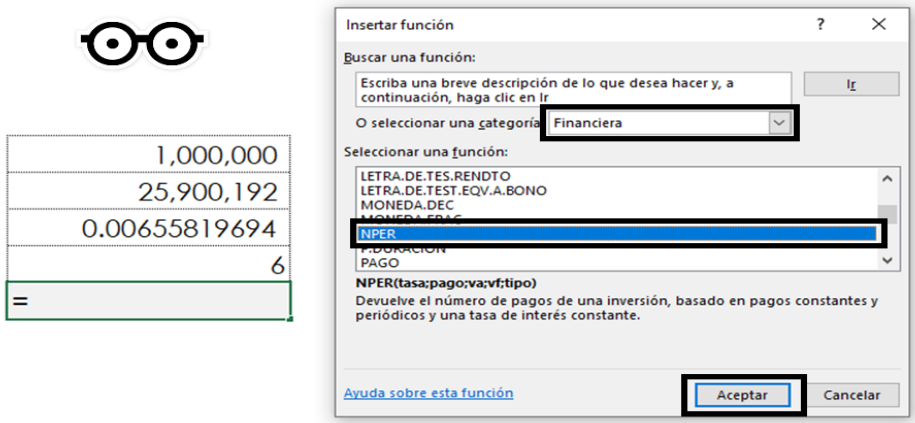
Luego, se elabora el caso en una hoja de Excel de la siguiente manera:

Tabla 5-1. Hallar n en una anualidad vencida

Anualidad	1.000.000	1.000.000
Valor futuro	25.900.192	25.900.192
Tasa de interés (EA)	4%	0,00655819694
Capitalización	Bimestral	6
Tiempo (años)	?	

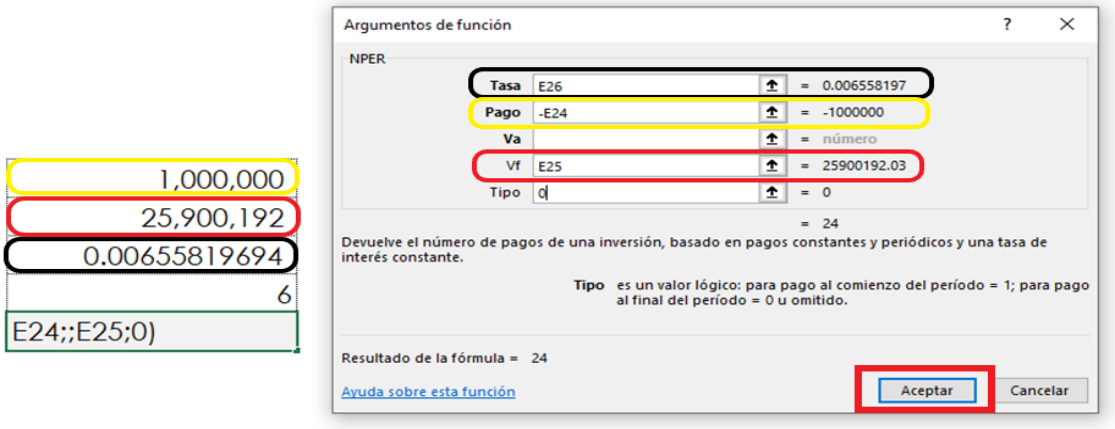
Luego de ubicarse en la celda frente al valor para hallar de color gris, como se observa en la tabla 5-1 de la hoja de Excel o también llamada hoja de cálculo, se insertar función (Fx), en la opción categoría se elige financiera y posteriormente en la lista seleccionar NPER.

Imagen 28. Función NPER



Luego aparecerá otra ventana que solicitará los datos de tasa de interés, pago o anualidad en negativo, valor futuro, y en tipo se debe digitar cero (0) u omitir.

Imagen 29. Función NPER variables



Después de se tienen las variables listas, se encuentra que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Anualidad	1.000.000	1.000.000
Valor futuro	25.900.192	25.900.192
Tasa de interés (EA)	4%	0,00655819694
Capitalización	Bimestral	6
Tiempo (años)	?	24

Respuesta: El comerciante debe esperar **24** bimestres o 4 años para alcanzar su objetivo de ahorro.

Ejemplo 6

Una persona deposita al final de cada mes 500.000 um, si la entidad financiera paga intereses cada mes a razón del 4,68%EA. Por lo anterior, determine:

¿Cuál es valor futuro al final de 3 años?

Solución:

Como se ha venido trabajando en otros temas, se debe elaborar una tabla de datos de la siguiente manera.

Los datos del problema son:

$i = 0{,}0468$ $kp = 12$ $n = 3$ años $A = 500.000$ $F = ?$

Teniendo en cuenta que la capitalización es mensual, las variables tiempo y tasa deben estar en la misma medida. Como se ha aprendido el cómo convertir una tasa efectiva a una periódica, es posible hacerlo mediante fórmula o función de Excel y el tiempo que está en años se multiplica por la capitalización, de esta manera se tendrá lo siguiente:

Tabla 5-2. Datos anualidad vencida en Excel

Anualidad	500.000	500.000
Tiempo (años)	3	36
Tasa de interés (EA)	4,68%	0,00381876394
Capitalización	Mensual	12
Valor futuro	?	

Después, desde la celda gris se debe la insertar función *financiera* opción *VF, ver para* recordar cómo hacerlo:

Imagen 30. Insertar Función

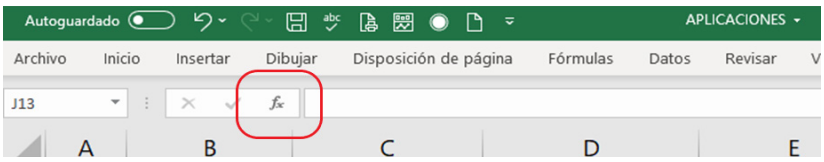
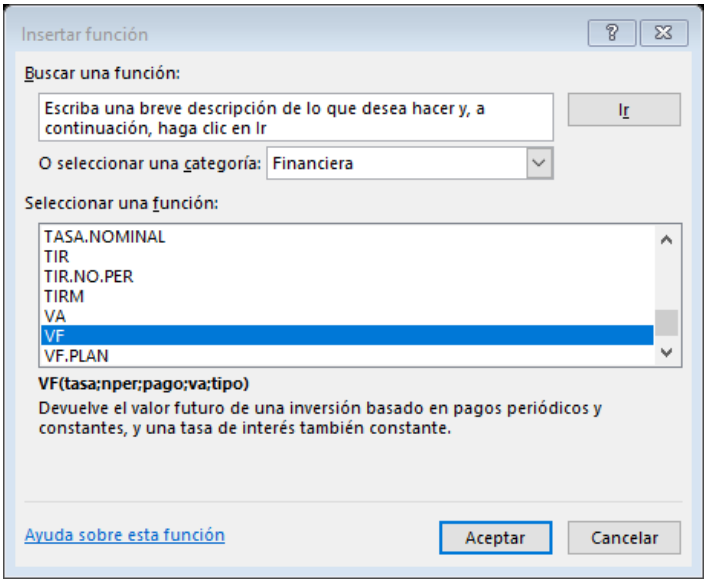
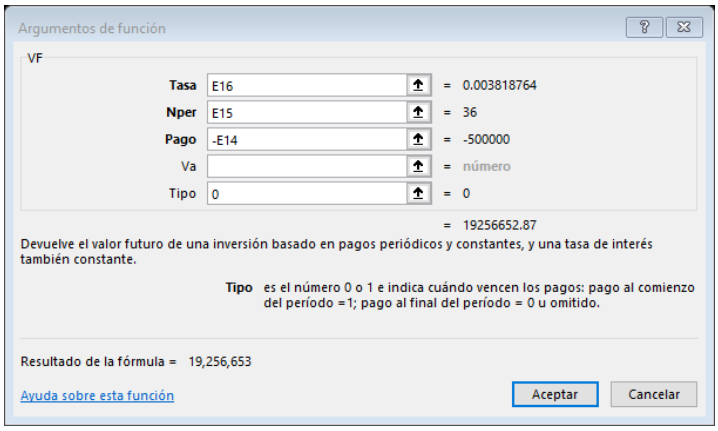


Imagen 31. Función VF



Posteriormente, la ventana emergente solicitará información con la cual ya se cuenta en la tabla previamente elaborada como lo es, la tasa de interés, número de periodos o tiempo, pago o anualidad, recordar que ésta tendrá un signo negativo y, por último, tipo que determinará si es vencida o anticipada; para este caso se puede omitir o digitar cero (0), y finalmente dar clic en *Aceptar*.

Imagen 32. Función VF variables



En consecuencia, el resultado será el siguiente:

Anualidad	500.000	500.000
Tiempo (años)	3	36
Tasa de interés (EA)	4,68%	0,00381876394
Capitalización	Mensual	12
Valor futuro	?	19.256.653

Respuesta: El valor futuro al depositar 500.000 al final de 3 años corresponde a 19.256.653

Ejemplo 7

Si una persona destina 850.000 um para ser depositados en una entidad financiera, con el propósito de acumular al final de un año y medio la suma de 17.000.000 um.

¿Cuál es la tasa mensual mínima que le deben ofrecer para cumplir con su propósito en el tiempo establecido?

Solución:

$$F = 17.000.000 \qquad kp = 12 \qquad n = 18 \qquad A = 850.000$$
$$ip = ?$$

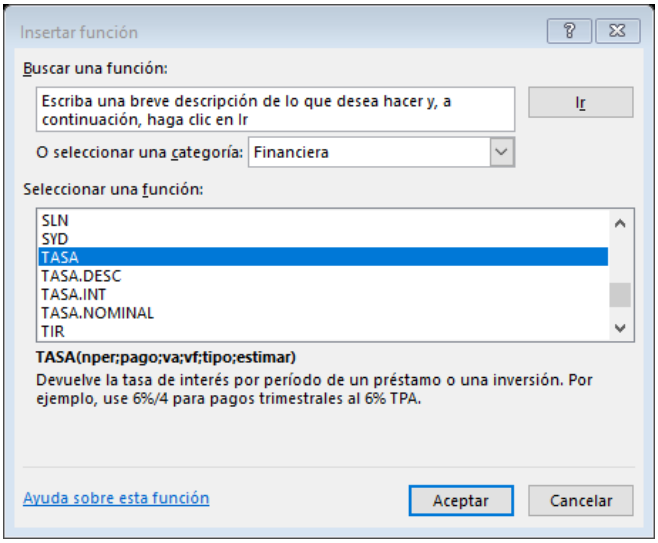
Ahora, lo anterior se elaborará en una tabla en Excel.

Tabla 5-3. Estimación tasa de interés

Anualidad	850.000	850.000
Valor futuro	17.000.000	17.000.000
Tiempo (años)	1,5	18
Capitalización	Mensual	12
Tasa de interés (EA)	?	

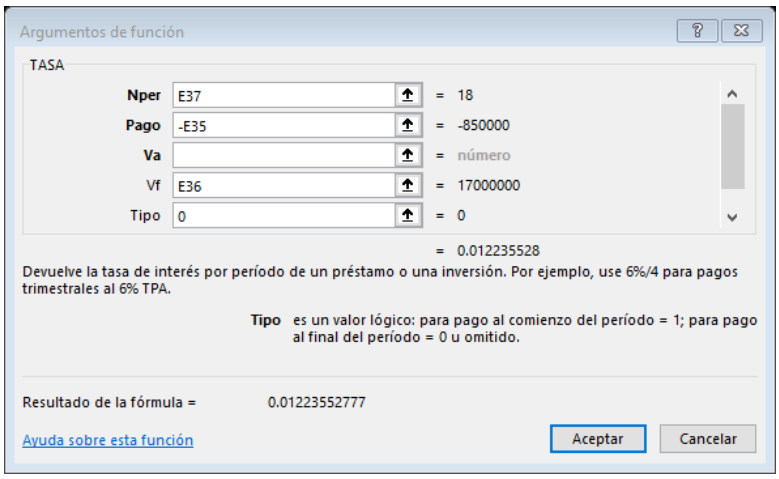
Después, desde la celda gris, se procede a insertar función financiera, opción TASA; ver cómo es esto:

Imagen 33. Función TASA



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya tiene la tabla como número de periodos o tiempo, pago o anualidad, la cual tendrá un signo negativo, valor futuro y, por último, tipo que determinará si es vencida o anticipada; para este caso es posible omitir o digitar cero (0), y finalmente dar clic en *Aceptar*.

Imagen 34. Función TASA variables



En consecuencia, el resultado será el siguiente:

Anualidad	850.000	850.000
Valor futuro	17.000.000	17.000.000
Tiempo (años)	1,5	18
Capitalización	Mensual	12
Tasa de interés (EA)	?	0,01223552777

Respuesta: La persona debe recibir como oferta de una entidad financiera una tasa mayor o igual al **1,22%mv** para alcanzar su objetivo.

Ejemplo 8

Si una persona acude a una institución financiera para solicitar un crédito por valor de 12.500.000 para ser pagado en 5 años, asumiendo que con el análisis de crédito es posible que le otorguen esa cantidad y considerando que la entidad cobra a razón del 11%EA.

¿Cuál es el valor de la cuota mensual fija que deberá pagar en caso de ser otorgado su crédito?

Solución:

$$P = 12.500.000 \qquad kp = 12 \qquad n = 60 \qquad i = 0{,}11 \qquad A = ?$$

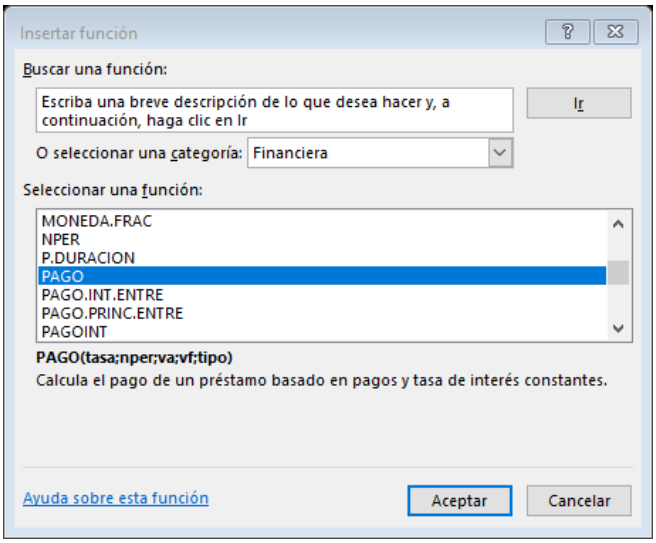
Ahora se elaborará una tabla en Excel, para la cual se utilizó la Fx TASA. NOMINAL para hallar ip mv.

Tabla 5-4. Estimación cuota crédito

Valor Presente - Crédito	12.500.000	12.500.000
Tiempo (años)	5	60
Capitalización	Mensual	12
Tasa de interés (EA)	11%	0,00873459382
Anualidad - Cuota	?	

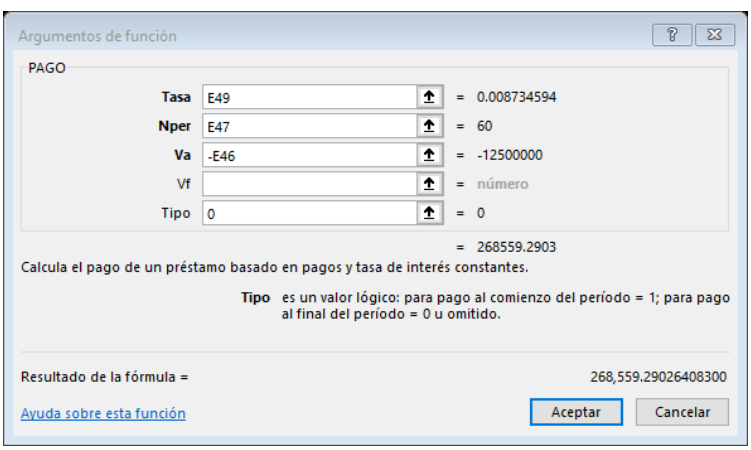
Después desde la celda gris se debe insertar función financiera, opción PAGO, ver cómo es esto:

Imagen 35. Función PAGO



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya se tiene en la tabla como tasa de interés, número de periodos o tiempo, el valor actual o presente tendrá un signo negativo, y finalmente tipo que para este caso es cero (0). Por último, dar clic en *Aceptar*.

Imagen 36. Función PAGO variables



En consecuencia, el resultado será el siguiente:

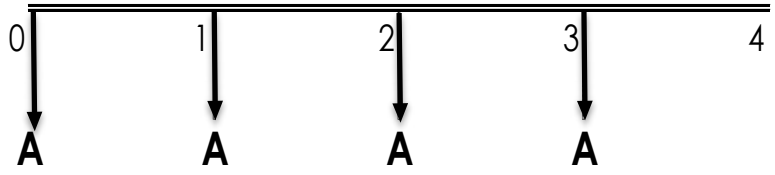
Valor Presente - Crédito	12.500.000	12.500.000
Tiempo (años)	5	60
Capitalización	Mensual	12
Tasa de interés (EA)	11,00%	0,00873459382
Anualidad - Cuota	?	268.559

Respuesta: La cuota que tendrá que pagar mensualmente durante los 5 años será equivalente a **268.559.**

5.5 ANUALIDADES ANTICIPADAS

En esta los pagos se hacen al principio del periodo, por ejemplo, el pago mensual del arriendo de una casa ya que primero se paga y luego se habita el inmueble. (Triana, 2021)

Imagen 37. Diagrama Anualidad Anticipada

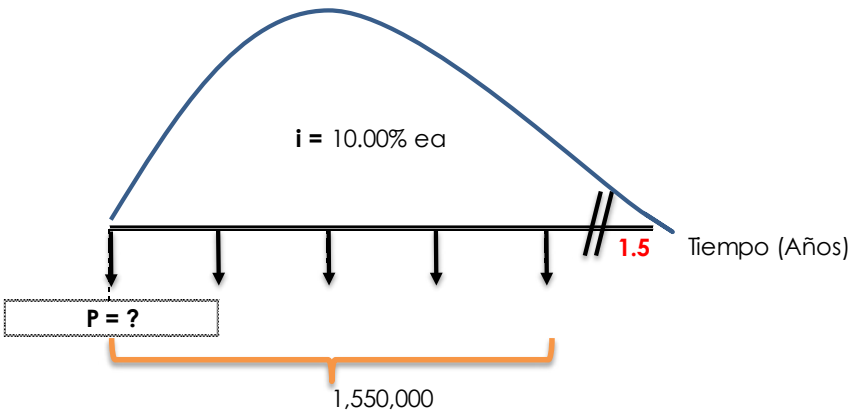


Recordar que estas series variables tienen la característica de realizar sus pagos al inicio de cada periodo.

Ejemplo 9

El arrendador de un local desea conocer el valor que debe pagar al inicio de un contrato, el cual tiene la siguiente información, Ver grafico:

Gráfica 5-5. Diagrama ejemplo anualidad anticipada



Nota: El valor del arriendo se paga de forma bimestral.

Solución:

En este caso no se cuenta con un problema planteado como el anterior, pero sí con el diagrama que brinda la información necesaria.

Entonces la fórmula para utilizar es la siguiente:

Fx Fórmulas

$$\mathbf{P} = \mathrm{A}\left|\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right|(1+\mathrm{i})$$

Realizando el mismo trabajo que en el caso anterior, en el cual la información dada y la que refleja el diagrama es la siguiente:

$$P = ? \qquad kp = ba \qquad A = 1.550.000 \qquad n = 1{,}5 \text{ años}$$
$$i = 10\%EA$$

$$i = 10\% = ip = [1 + 0{,}10]^{\frac{1}{6}} - 1$$

$$i = 0{,}01601186777339$$

$$n = 1{,}5 \text{ años} = n \times kp$$

$$n = 1{,}5 \times 6 = 9$$

Finalmente, se tendría lo siguiente resolviendo en la calculadora Fx-82MS:

$$P = 1550000 \times ((1 - (1+0{,}01601186777339)^{\wedge}-9) \div 0{,}01601186777339) \times (1 + 0{,}01601186777339) = 13.102.203$$

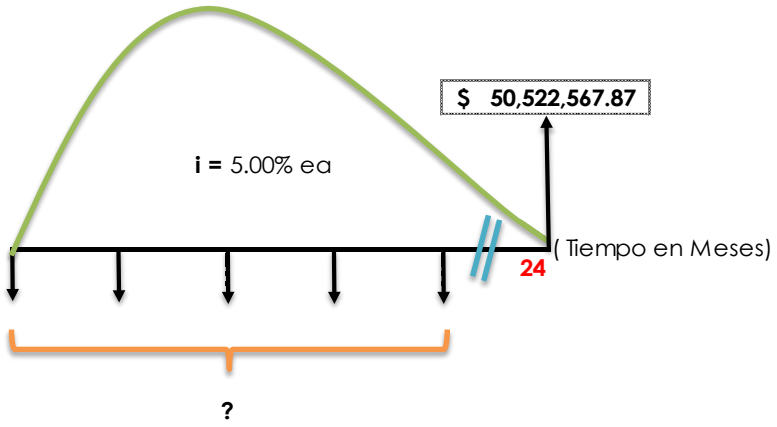
Respuesta: El arrendador tendrá que pagar al inicio del contrato de arrendamiento un valor equivalente a **13.102.203 COP.**

Ahora se presentará otro caso de aplicación de anualidad anticipada.

Ejemplo 10

En este caso se debe extraer la información del gráfico.

Gráfica 5-6. Diagrama ejemplo 2 anualidad anticipada



El diagrama suministra la siguiente información:

$$F = 50.522.567,87 \quad i = 5,00\%EA \quad n = 24 \quad kp = \text{mensual } (12) \quad A = ?$$

En este caso, se requiere determinar el valor del pago o anualidad, pero antes de proceder a realizar los cálculos, se debe tener en cuenta que la tasa es efectiva anual y no es posible trabajar con ella; según la capitalización es necesario convertirla en mensual y, para tal fin, se procede a lo siguiente:

$$ip = (1+ 0,05)(1/12) \ -1 = 0,0040741$$

En el caso de que una de las variables sea el valor futuro, la fórmula despejada es la siguiente:

Fx Fórmulas

$$\mathbf{A} = \mathrm{F} \div \left| \frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{\mathrm{i}} \right| (1+\mathrm{i})$$

Finalmente, se sustituye en la fórmula.

Cómo resolverlo en la calculadora *Fx-82MS*:

$$A = 50522567.87 \div (((1+ 0.0040741)^{24} - 1) \div 0.0040741) \times (1+0.0040741) = 2.008.148$$

Respuesta: El valor que se debe pagar al inicio de cada mes durante 2 años corresponde a **$ 2.008.148.**

Ejemplo 11

¿Cuántos pagos semestrales de 8.000 um de forma anticipada se deben hacer para acumular una cantidad de 125.015 si esta renta semestralmente al 8%anual capitalizable?

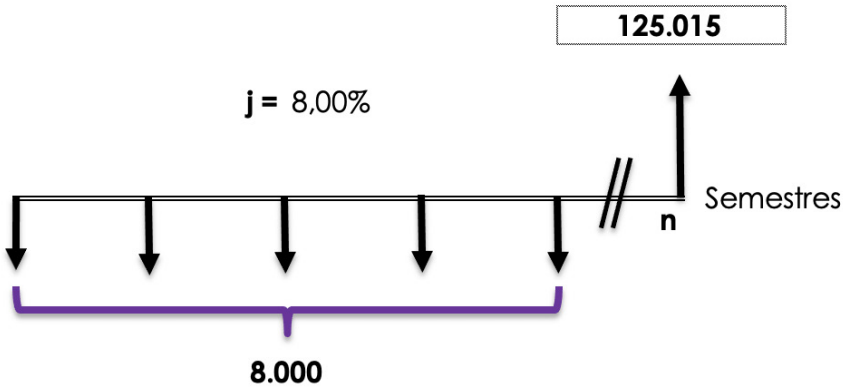
Solución:

Los datos del problema son:

$$F = 125.015 \quad j = 8{,}00\% \quad ip = 0{,}04 \quad kp = \text{semestral} \quad A = 8.000 \quad n = ?$$

Para el caso de las anualidades encontrar el número de pagos equivale al tiempo. Hay que recordar que una característica es que debe haber igualdad en los pagos y periodos.

Gráfica 5-7. Diagrama cálculo del tiempo



Fx Fórmulas

$$\mathbf{n} = \frac{\log\left(1 - \frac{\text{Fi}}{\text{A}(1+\text{i})}\right)}{\log(1+\text{i})}$$

$$\text{n} = \frac{\log\left(1 - \frac{125.015\ \text{x}0,04}{8.000(1+0,04)}\right)}{\log(1+0,04)}$$

$$\text{n} = 12$$

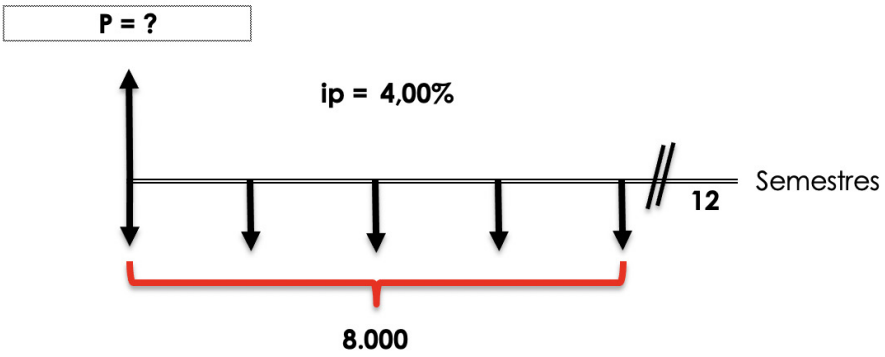
Respuesta: Para lograr reunir un valor de 125.015, se deben realizar 12 pagos de 8.000 cada semestre.

Ejemplo 12

Suponiendo el mismo caso del ejemplo 11, en el cual se deben realizar 12 pagos de 8.000 de forma anticipada cada semestre a una tasa del 4%

¿Cuál sería el valor actual o presente de dichos pagos?

Gráfica 5-8. Diagrama cálculo valor presente



Fx Fórmulas

$$\mathbf{P} = \mathrm{A}\left|\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right|(1+\mathrm{i})$$

$$\mathrm{P} = 8.000\left|\frac{1-(1+0,04)^{-12}}{0,04}\right|(1+0,04)$$

$$\mathrm{P} = 78.084$$

Respuesta: En caso de aceptar la oferta de hacer un único pago ahora con las mismas condiciones, este pago sería de **78.084.**

5.6 ANUALIDADES ANTICIPADAS Fx DE EXCEL

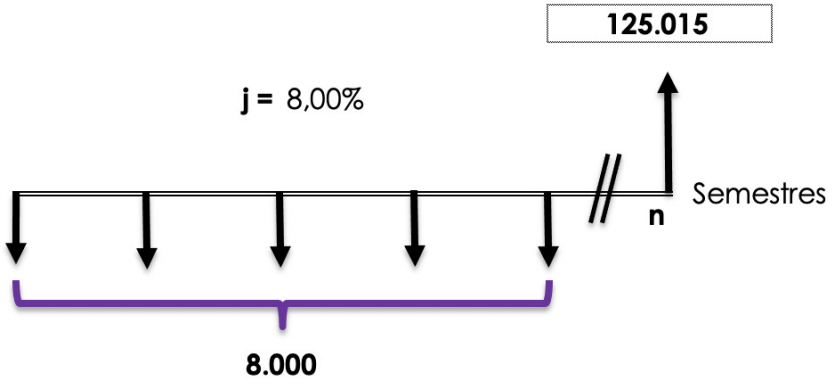
Ejemplo 13

Para el siguiente caso de anualidades anticipadas se elaborará una tabla en Excel con las variables de anualidad o pago, tasa de interés y capitalización, con el fin de hallar el tiempo; para esto se seguirá utilizando la función NPER y solamente habrá una variación. Ver cómo hacerlo.

Tabla 5-6. Tiempo de una anualidad anticipada

Anualidad	8.000	8.000
Valor futuro	125.015	125.015
Tasa de interés (EA)	8%	0,04
Capitalización	Semestral	2
Tiempo (años)	?	

Gráfica 5-9. Tiempo de una anualidad anticipada

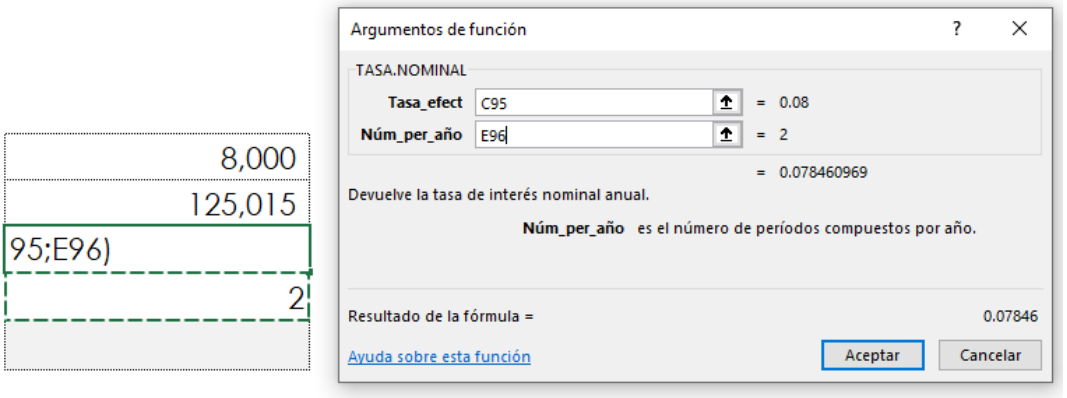


Como se puede observar en la tabla 5-6, la capitalización es semestral, es decir, dos periodos al año; teniendo en cuenta que la tasa es efectiva

anual, es necesario convertirla en semestre vencido por dos razones: una que Excel no trabaja tasas anticipadas y dos, que, en la práctica, normalmente se aplican tasas vencidas para el cálculo de pagos anticipados, de este modo la respuesta del tiempo se estimará en semestres.

A modo de repaso se hará el cálculo de la tasa periódica con la función TASA.NOMINAL.

Imagen 37. Función TASA.NOMINAL



Posteriormente dar clic en Aceptar, y como el resultado es una tasa nominal, es necesario dividir el resultado en el número de capitalizaciones, que para el caso es 2, así se obtendrá la tasa periódica semestre vencido.

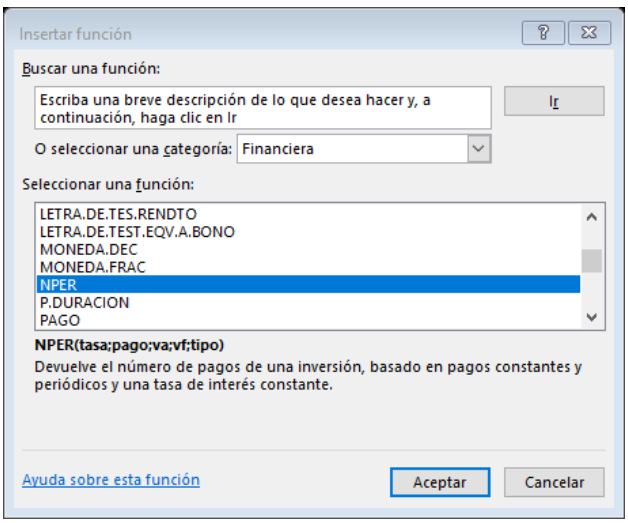
Anualidad	8,000	8,000
Valor Futuro	125,015	125,015
Tasa de Interés (EA)	8.00%	C95;E96)/E96
Capitalización	Semestral	2
Tiempo (Años)	**?**	

El resultado es:

Anualidad	8.000	8.000
Valor futuro	125.015	125.015
Tasa de interés (EA)	8%	0,04
Capitalización	Semestral	2
Tiempo (años)	?	

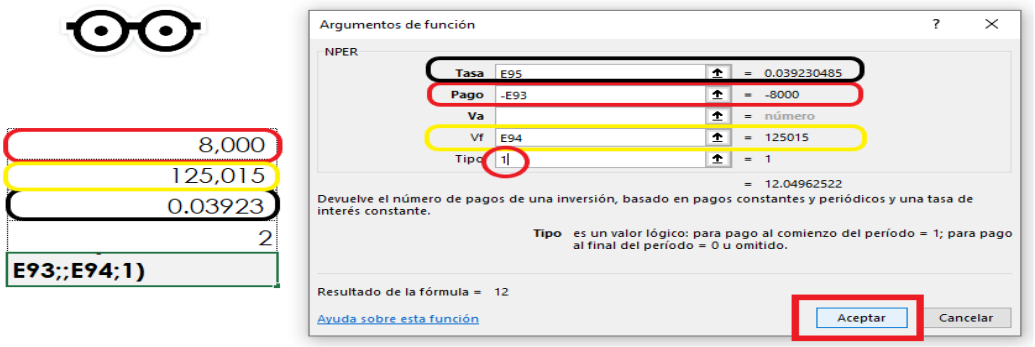
Finalmente, es necesario ubicarse en la celda gris de la tabla de datos de salida y proceder a insertar la función NPER:

Imagen 38. Función NPER



Después la ventana emergente solicitará la información que ya se tiene en la tabla como tasa de interés y pago o anualidad; recordar que esta tendrá un signo negativo, en este caso se cuenta con el valor futuro y finalmente con tipo. Como en este caso es una anualidad anticipada digitar 1 y, finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Imagen 39. Función NPER variables



Luego de tener las variables listas, se observa que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en Aceptar.

Anualidad	8.000	8.000
Valor futuro	125.015	125.015
Tasa de interés (EA)	8%	0,04
Capitalización	Semestral	2
Tiempo (años)	?	12

En caso de que el problema no suministre el valor futuro, pero sí el actual o presente, el procedimiento es el mismo y el resultado será igual.

Respuesta: Los números de pagos (o el tiempo) sobre 8.000 que deben efectuarse para obtener un valor futuro de 125.015 a razón del 8%EA son **12.**

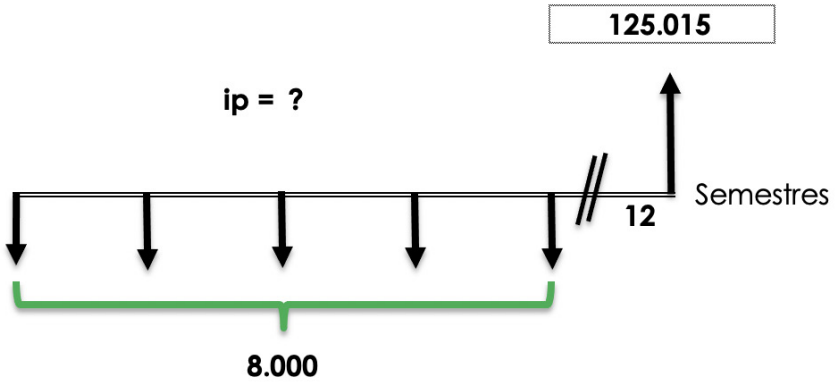
Ejemplo 14

En este caso se determinará la tasa de interés aplicada a una anualidad anticipada. Como se desarrolló en el ejemplo 16, también se formularán las variables en Excel y se tomará el mismo caso del ejemplo 11. Ver cómo esto:

Tabla 5-7. Tasa de interés de una anualidad anticipada

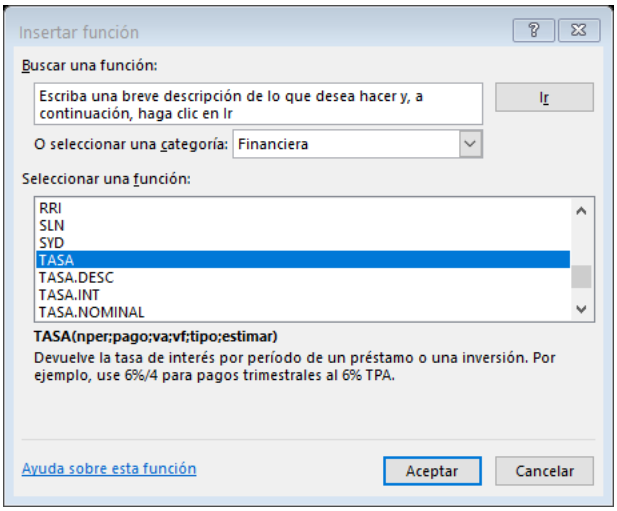
Anualidad	8.000	8.000
Valor futuro	125.015	125.015
Tiempo (años)	6	12
Capitalización	Semestral	2
Tasa de interés	?	

Gráfica 5-10. Tasa de interés de una anualidad anticipada



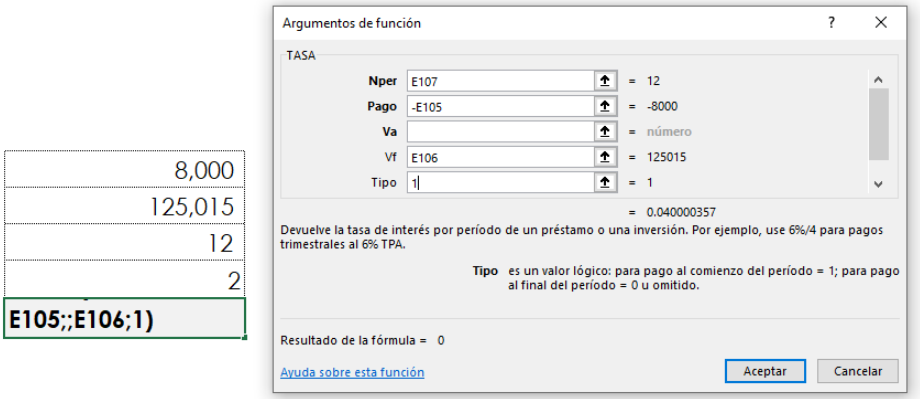
Como se observa en la tabla 5-7, las variables son las del caso 11 trabajado anteriormente, luego de ubicarse en la celda gris de los datos de salida y se procede a insertar la función *TASA* ya trabajada en otros temas:

Imagen 40. Función TASA



Posteriormente, la nueva ventana emergente solicitará cierta información, con la cual ya se cuenta en la tabla organizada como lo es tiempo y pago o anualidad. Importante recordar que esta tendrá un signo negativo, en este caso se cuenta con el valor futuro y finalmente el tipo; como se está desarrollando una anualidad anticipada, digitar 1 y, por último, dar clic en *Aceptar*.

Imagen 41. Función TASA variables



Luego de que se tienen las variables listas, el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente pulsar en Aceptar.

Anualidad	8.000	8.000
Valor futuro	125.015	125.015
Tiempo (años)	6	12
Capitalización	Semestral	2
Tasa de interés	?	0,04

Respuesta: Para el caso, la tasa aplicada en la anualidad corresponde al **4%sv.**

Ejemplo 15

Ahora se presentará cómo calcular el valor presente del ejemplo 12, el cual se trata de una anualidad anticipada; esta es muy utilizada en temas de créditos de sistema de pagos cuota fija o en los contratos de arrendamiento.

Suponiendo que existe un tomador de una bodega en arriendo, en la cual paga 8.000 dólares cada semestre y tiene un contrato por 6 años con el dueño del bien; en caso de existir una negociación por pago anticipado del valor del acuerdo a una tasa del 4%

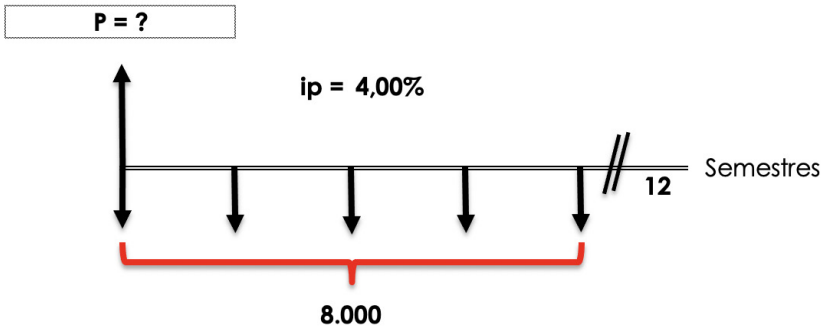
¿Cuánto tendría que pagar el tomador por el contrato al inicio de este?

Teniendo en cuenta la metodología trabajada anteriormente en relación con el planteamiento del problema en datos de entrada y salida en Excel, éste quedaría de la siguiente manera:

Tabla 5-8. Valor presente o actual de una anualidad anticipada

Anualidad	8.000	8.000
Tasa de interés - ip	4 %	0,04
Tiempo (años)	6	12
Capitalización	Semestral	2
Valor actual o presente	?	

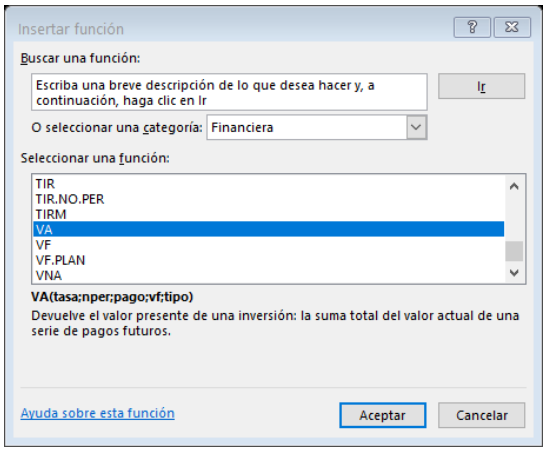
Gráfica 5-11. Valor presente o actual de una anualidad anticipada



Como se observa en la tabla 5-8, las variables son las del ejemplo 12; posteriormente, se debe ubicar en la celda gris de los datos de salida y se procede a insertar la función VA también ya utilizada en temas atrás.

Ver como es esto:

Imagen 42. Función VA



Luego la nueva ventana emergente solicitará cierta información, la cual ya se encuentra en la tabla organizada como lo es la tasa de interés, tiempo y pago o anualidad. Recordar el pago tendrá un signo negativo, y finalmente en tipo. Como se está desarrollando una anualidad anticipada, se debe digitar 1, y por último dar clic en *Aceptar*.

Imagen 43. Función VA variables

Después de que se tiene las variables listas, se observar que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Anualidad	8.000	8.000
Tasa de interés - ip	4 %	0,04
Tiempo (años)	6	12
Capitalización	Semestral	2
Valor actual o presente	?	78.084

Respuesta: En caso del tomador decidir pagar hoy el valor del contrato a razón del 4%sv, tendría que acreditar de su cuenta una suma equivalente a **78.084 dólares.**

Ejemplo 16

Ahora se calculará el valor futuro del ejemplo 11, siendo esta una anualidad anticipada utilizada en temas de créditos con sistema de pago cuota fija o en los contratos de arrendamientos como ya se había mencionado.

Suponga que existe un tomador de una bodega en arriendo, por la cual paga 8.000 dólares cada semestre y tiene un contrato por 6 años con el dueño del bien; en caso de existir una negociación por pago único una vez termine el contrato, cuyo acuerdo fija una tasa del 4%

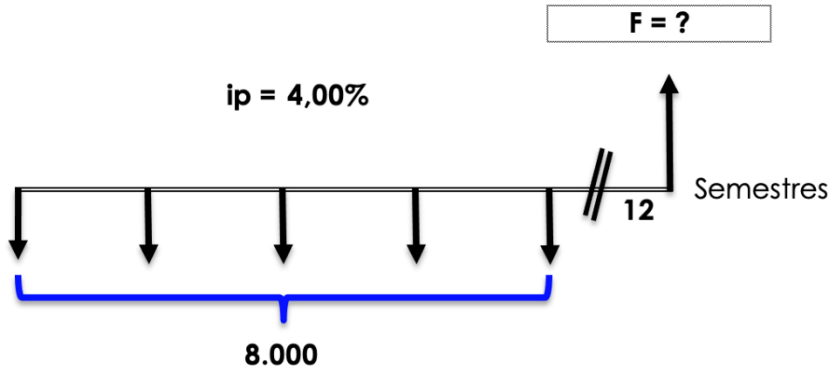
¿Cuánto tendría que pagar el tomador por el contrato una vez termine este?

Teniendo en cuenta la metodología trabajada el planteamiento del problema en datos de entrada y salida en Excel se daría de la siguiente manera:

Tabla 5-9. Valor futuro de una anualidad anticipada

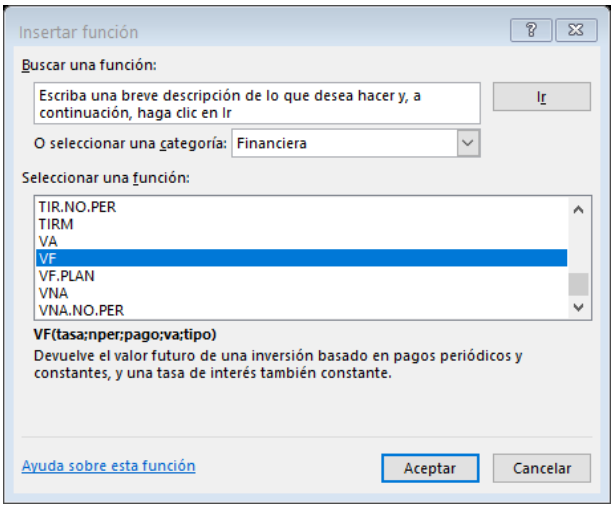
Anualidad	8.000	8.000
Tasa de interés - ip	4 %	0,04
Tiempo (años)	6	12
Capitalización	Semestral	2
Valor futuro	?	

Gráfica 5-12. Valor futuro de una anualidad anticipada



Como se observa en la tabla 5-9, las variables son las del caso o ejemplo 11; posteriormente, es necesario ubicarse en celda gris de datos de salida y posteriormente se procede a insertar la función VF también ya utilizada en temas atrás. Ver como hacerlo:

Imagen 43. Función VF



Luego la nueva ventana emergente solicitará cierta información, la cual ya reposa en la tabla organizada como es la tasa de interés, tiempo y pago o anualidad; recordar que esta tendrá un signo negativo, y finalmente el tipo. Como se está desarrollando una anualidad anticipada, es necesario digitar 1 y, por último, dar clic en *Aceptar*.

Imagen 44. Función VF variables

Después de contar con las variables necesarias, se observa que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en Aceptar.

Anualidad	8.000	8.000
Tasa de interés - ip	4 %	0,04
Tiempo (años)	6	12
Capitalización	Semestral	2
Valor futuro	?	125.015

Respuesta: En caso de que el tomador decida pagar al final del contrato un único pago teniendo en cuenta una razón del 4%sv, el valor para pagar sería una suma equivalente a **125.015** dólares.

PROBLEMAS

1. YV necesita reunir 25.000.000 COP para el día 10-12-2025, para tal fin constituye un fondo de ahorro mediante depósitos trimestrales, efectuándose el primero el 10-09-2020 y el último el 10-06-2025. Además, se efectúa un pago extraordinario de 1.000.000 COP el 10-03-2024. Si el fondo paga el 16%ATV, realizar el diagrama de flujo. Además, ¿cuál es el valor de cada pago? ¿Cuál fue la TEA aplicada en la operación?

   Respuesta: 735,348 y 16.99%

2. Un electrodoméstico se financia de la siguiente forma: una cuota inicial de $ 400.000 y 12 cuotas iguales mensuales de $85.000 pagaderas de forma anticipada. Si la tasa que se le cobra es del 3,5%mensual, ¿cuál es valor del electrodoméstico?

   Respuesta: $ 1.250.131,83.

3. Un artículo que tiene un valor de contado de $ 3.000.000 se compra financiado de la siguiente forma: una cuota inicial de $ 250.000 y cuotas mensuales de $ 194.125,16 pagaderas de forma anticipada. Si le cobran una tasa del 3% mensual, ¿en cuánto tiempo termina de pagar el artículo?

   Respuesta: 18 meses.

4. ¿Cuánto dinero de acumularía si se efectúan 60 pagos iguales mensuales de $ 500.000, si el banco liquida intereses al 0,9% mensual.

   Respuesta: $ 39.548.156,63.

5. Una deuda de $ 50.000 se va a pagar mediante 12 pagos uniformes vencidos, con una tasa del 2%mensual. Hallar el valor de cada pago determinando la fecha focal el día de hoy y establecer la fecha del pago número12.

   Respuesta: $ 4.727,99.

6. Una persona empieza el 5 de julio de 2016 a hacer depósitos de $150.000 mensualmente, el día 5 de cada mes. Estos depósitos son efectuados en una entidad financiera que paga el 12%AMV, pero a partir del 5 de octubre de 2017 decidió que sus depósitos serían de $200.000. El último depósito lo hizo el 5 de agosto de 2019. Si el 5 de octubre de 2019 decide pagar la cuenta, ¿cuál será el monto de sus ahorros?

   Respuesta: $ 8.343.115,98.

7. Una persona arrienda una casa en $500.000 pagaderos mes anticipado, si tan pronto como recibe cada arriendo lo invierte en un fondo que paga el 2%mensual, ¿cuál será el monto de sus ahorros al final de un año?

   Respuesta: $ 6.840.165,76.

8. Un contrato de arrendamiento estipula pagos mensuales de $400.000 al principio de cada mes durante un año. Si suponemos una tasa de interés del 30%AMV, ¿cuál será el valor del pago único que hecho al principio del contrato lo pagaría en su totalidad?

   Respuesta: $ 4.205.683,49.

9. Una persona necesita reunir 12.000 USD para el día 15-08-2015, para tal fin constituye un fondo de ahorro mediante depósitos bimestrales, efectuándose el primero el 15-04-2010 y el último el 15-02-2015; además, se efectúa un pago extraordinario de 1.200 USD el 15-12-2013. Si el fondo paga el 12%ABV, ¿cuál es el valor de cada pago?

   Respuesta: 244 dólares.

10. Una máquina produce 2.000 unidades mensuales, las cuales deben venderse a $ 80 c/u. El estado actual de la máquina es regular y si no se repara podrá servir durante seis meses más y luego desecharla, pero si hoy le hacemos una reparación total a un costo de $ 800.000, se garantiza que la máquina podrá servir durante un año contado a partir de la reparación. Suponiendo una tasa del 4% ¿será aconsejable repararla?

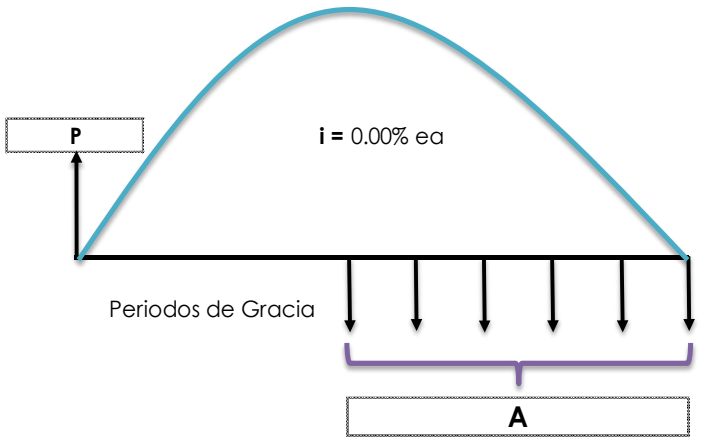
    Respuesta: No es aconsejable.

5.7 ANUALIDADES DIFERIDAS

Diferir (del latín differre), aplazar la ejecución de un acto.

Son aquellas anualidades valoradas con posterioridad a su origen. El tiempo que transcurre entre el origen de la anualidad y el momento de valoración es el periodo de diferimiento, gracia o carencia. (Triana, 2021)

Gráfica 5-13. Diagrama de anualidad diferida



Para recordar y tener en cuenta que este tipo de anualidades tiene un periodo de gracia, es decir, unos tiempos cuando no se efectúan pagos, pero ello no quiere decir que no se apliquen o cobren intereses. Ver el siguiente caso:

Ejemplo 17

¿Qué valor debe pagar mensualmente una persona que toma un crédito de 4.000.000 um con las siguientes condiciones: la entidad financiera otorga el empréstito para ser cancelado en 6 pagos iguales, teniendo en cuenta un periodo de gracia de tres (3) meses a razón del 32,92%EA?

P = 4.000.000 n = 6 k= 3 i = 32,92% kp = mensual A = ?

Antes, se debe hallar la tasa periódica para poder reemplazar en la fórmula, así:

$$ip = (1 + 0{,}3292) \wedge (1 \div 12) - 1 = 0{,}023998$$

Luego determinar la fórmula para utilizar.

Fx Fórmulas

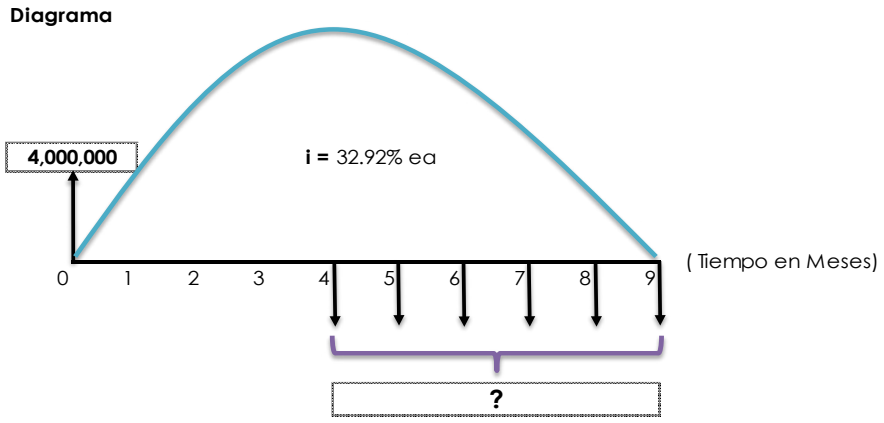
$$\mathbf{P} = \mathrm{A}\left|\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right|(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{k}}$$

Despejando A quedaría de la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = \mathrm{P} \div \left|\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right|(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{k}}$$

Tras tener las variables listas para aplicar, se diseña el diagrama de pagos o flujo de caja.

Gráfica 5-14. Diagrama de anualidad diferida



Finalmente, sustituir.

Cómo hacerlo en la calculadora Fx-82MS:

A = 4000000 ÷ (((1-(1+0.023998)^-6) ÷ 0.023998) x (1+ 0.023998)^-3)

A = 777.137

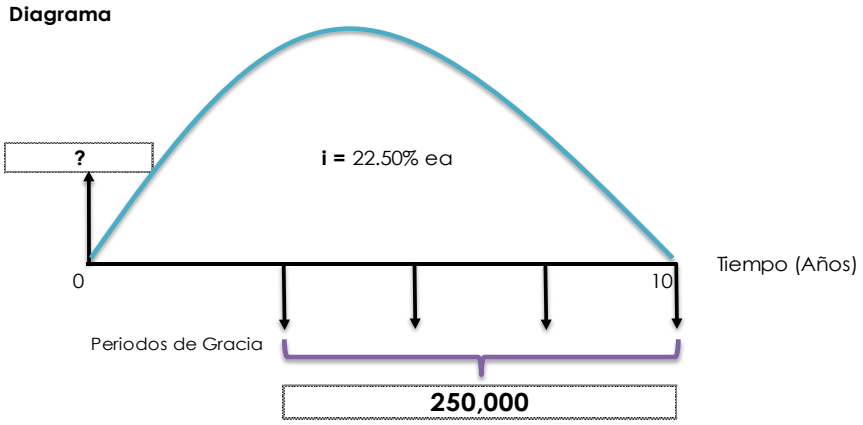
Respuesta: El valor que debe pagar la persona que tomó el crédito con las condiciones anteriormente descritas es de **777.137 um.**

Ejemplo 18

Determinar el valor de un crédito otorgado por una entidad financiera a una persona que se le dieron cinco periodos de gracia y luego pagó al final de cada mes la suma de $ 250.000 durante 10 años, teniendo en cuenta que la entidad liquidaba intereses a razón del 22,5%EA.

Para resolver este problema de anualidad diferida es necesario ver el problema desde un diagrama, el cual sería de la siguiente manera:

Gráfica 5-15. Diagrama de valor presente anualidad diferida



Según el diagrama, la información planteada en el caso por resolver es necesario despejar y convertir el tiempo y la tasa de interés en periodos mensuales.

$$Ip = (1 + 0{,}225)^{(1 \div 12)} - 1 = 0{,}01705555$$

$$n = 10 \times 12 = 120$$

Por lo anterior se tendrá lo siguiente:

A = 250.000 i = 0,01705555 n = 120 k = 5 kp = mv P = ?

Para resolver se utiliza la siguiente fórmula:

Fx Fórmulas

$$\mathbf{P} = A\left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|(1+i)^{-k}$$

Cómo resolverlo en la calculadora Fx-82MS:

P = 250000 x ((1-(1+0.01705555)^-120) ÷ 0.01705555) x (1+ 0.01705555)^-5

P = 11.699.414

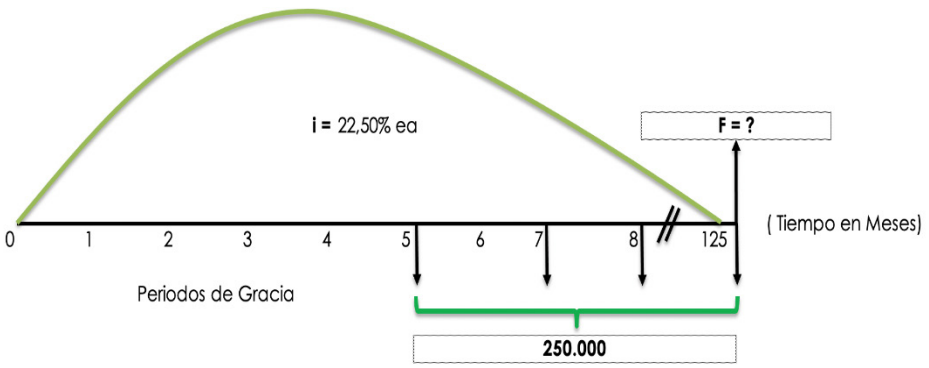
Respuesta: El valor del crédito otorgado fue de **$11.699.414.**

Ejemplo 19

Determinar el valor futuro de un crédito otorgado por una entidad financiera a una persona que se le asignaron cinco periodos de gracia y luego pagó al final de cada mes la suma de $ 250.000 durante 10 años, teniendo en cuenta que la entidad liquidaba intereses a razón del 22,5%EA.

Para resolver este problema de anualidad diferida es necesario ver el problema desde un diagrama, el cual sería de la siguiente manera:

Gráfica 5-16. Diagrama de valor futuro anualidad diferida



El diagrama muestra la información planteada en el caso por resolver, luego se tendrá que despejar o convertir el tiempo y la tasa de interés en periodos mensuales.

$$Ip = (1 + 0{,}225)\text{^}(1 \div 12) - 1 = 0{,}01705555$$

$$n = 10 \times 12 = 120$$

Por lo anterior se tendría lo siguiente:

$A = 250.000$ $i = 0{,}01705555$ $n = 120$ $k = 5$ $kp = mv$ $F = ?$

Para resolver se utiliza la siguiente fórmula:

Fx Fórmulas

$$\mathbf{F = A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right](1+i)^{-k}}$$

$$F = 250.000\left[\frac{(1+0{,}01705555)^{120}-1}{0{,}01705555}\right](1+0{,}01705555)^{-5}$$

$$F = 89.027.669$$

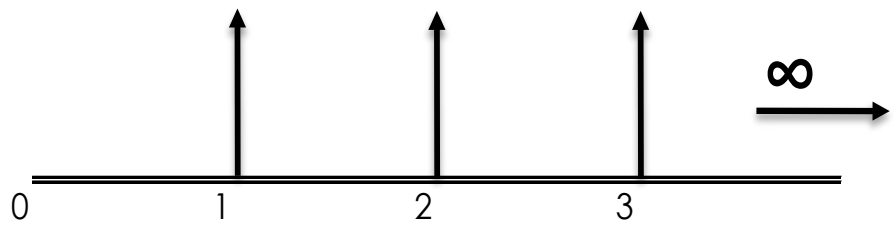
Respuesta: El valor futuro del crédito otorgado equivale a **$89.027.669.**

5.8 ANUALIDADES PERPETUAS

Las anualidades perpetuas son una serie de ingresos o egresos que tienen infinito número de pagos, en realidad estas anualidades infinitas no existen ya que todo tiene un final; sin embargo, cuando el número de pagos es muy grande se asume que es infinito (Baca Currea, 2000).

Este tipo de anualidades son típicas cuando se pone a rentar un capital y solo se retiran los intereses.

Gráfica 5-17. Anualidad perpetua o infinita



La fórmula para utilizar será:

Fx Fórmulas

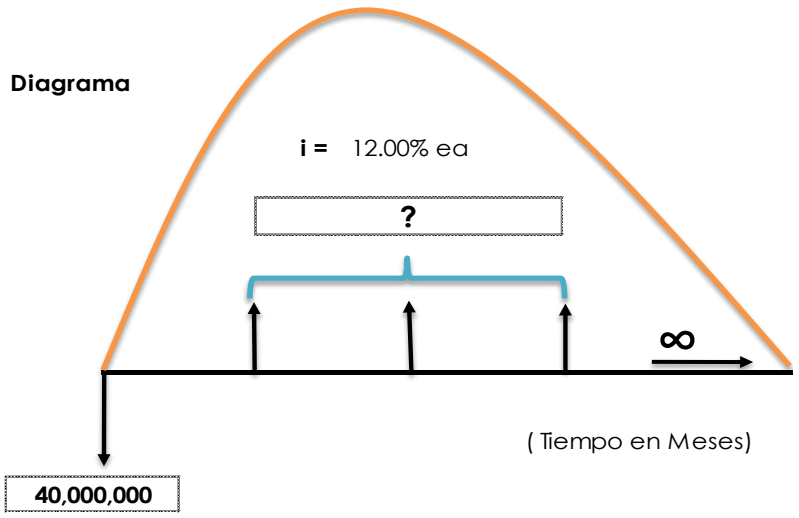
$$P = \frac{A}{i}$$

Ejemplo 20

Calcule la renta perpetua mensual vencida que se genera al comprar un bono del Gobierno por un valor de 40.000.000 COP, los cuales poseen una tasa de interés del 12%EA.

El diagrama de la inversión quedaría de la siguiente forma:

Gráfica 5-17. Diagrama de renta perpetua mensual vencida



Luego se procede a llevar la tasa a mv así:

$$ip = (1 + 0{,}12) \wedge (1 \div 12) - 1 = 0{,}00948879$$

Despejando la fórmula de valor presente se tendrá: $A = P*i$

$$A = 40.000.000 \times 0{,}00948879 = 379.551{,}72$$

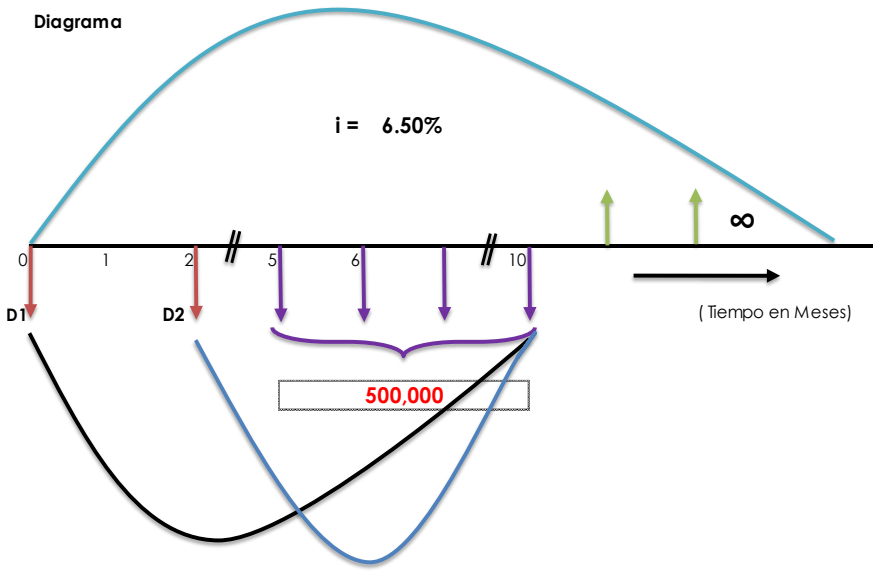
Respuesta: El valor por recibir de forma perpetua será equivalente a 379.551,72 COP.

Ejemplo 21

Un joven inversionista deposita hoy 10 millones de COP, posteriormente 5 millones a los 2 años, luego al final del año 5 inicia a hacer depósitos mensuales de 500.000 COP durante 5 años. Si el fondo de inversiones le reconoce 6,5%EA, ¿cuánto podrá retirar de manera indefinida comenzando a partir del año 11?

Para resolver este caso es necesario realizar un diagrama de flujo, el cual dará un panorama más claro del paso a seguir para resolver de forma acertada el problema financiero.

Gráfica 5-18. Diagrama de flujo invesiones



Como se observa en el diagrama, es necesario determinar el valor futuro en el año 10, esto es lo que se conoce como fecha focal. De esta manera se puede establecer el pago perpetuo a partir de ahí, sin embargo, es necesario realizar tres procesos: uno corresponde en llevar al año 10 el

valor del primer y segundo depósito mediante el cálculo del VF a través del interés compuesto, luego determinar al mismo año el valor de todos los pagos efectuados desde el año cinco de forma mensual y, finalmente, sumar. Lo anterior será de la siguiente manera:

Depósito 1 = 10.000.000 n = 10 ip = 0,065 VF = ?

$$VF = 10.000.000\ (1+ 0,065)10 = 18.771.374,65$$

Depósito 2 = 5.000.000 n = 8 ip = 0.065 VF = ?

$$VF = 5.000.000\ (1+ 0,065)8 = 8.274.978,36$$

Para hallar el valor futuro de los pagos uniformes, es necesario pasar la tasa efectiva a mes vencido al igual que el tiempo a meses.

$$Ip = (1 + 0,065) \wedge (1 \div 12) - 1 = 0,00526169 \qquad n = 5 * 12 = 60$$

A = 500.000 ip = 0,00526169 n = 60 kp = mv F = ?

En la calculadora Fx-82MS:

$$F = 500000 \times (((1 + 0.00526169)^{60} -1) \div 0.00526169) = 35.168.012,81$$

$$F = 18.771.374,65 + 8.274.978,36 + 35.168.012,81 = 62.214.365,81$$

La fórmula despejada para hallar el pago es A = P * i

$$A = 62.214.365,81 \times 0,00526169 = 327.353$$

Respuesta: El valor que el inversionista recibirá de manera indefinida, una vez haya efectuado los depósitos después de los diez años equivale a **327.353 COP.**

Cómo despejar una fórmula

Valor presente de una anualidad anticipada… Despejar A

$$\mathbf{P} = A\left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|(1+i)$$

$$P \div \left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|(1+i) = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = P \div \left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|(1+i)$$

Valor presente de una anualidad anticipada… Despejar n

$$\mathbf{P} = A\left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|(1+i) \qquad \frac{P}{A(1+i)} = \frac{1-(1+i)}{i}$$

Como no se deben tener variables negativas (?) es necesario multiplicar x -1

$$\frac{P_i}{A(1+i)} = 1-(1+i)^{-n} \quad (-1) \qquad \frac{Pi}{A(1+i)} - 1 = -(1+i)^{-n} \quad (-1)$$

$$-\frac{Pi}{A(1+i)} + 1 = (1+i)^{-n} \qquad \text{ordenando,} \qquad 1 - \frac{P_i}{A(1+i)} = (1+i)^{-n}$$

Necesario bajar n que es un exponente, para lo cual se aplica Log.

$$\log\left(1-\frac{Pi}{A(1+i)}\right)=-n\log(1+i)$$

Nuevamente se debe multiplicar x -1, de esta forma quedaría así:

$$-\log\left(1-\frac{Pi}{A(1+i)}\right)=n\log(1+i)$$

$$\mathbf{n}=\frac{-\log\left(1-\frac{Pi}{A(1+i)}\right)}{\log(1+i)}$$

Fórmulas valor futuro de una anualidad anticipada

$$\mathbf{F}=A\left|\frac{(1+i)^n-1}{i}\right|(1+i)$$

$$\mathbf{n}=\frac{\log\left(1+\frac{Fi}{A(1+i)}\right)}{\log(1+i)}$$

$$\mathbf{A}=F\div\left|\frac{(1+i)^n-1}{i}\right|(1+i)$$

Fórmulas valor futuro de una anualidad vencida

$$\mathbf{F} = A\left|\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right|$$

$$\mathbf{n} = \frac{\log\left(\frac{Fi}{A}+1\right)}{\log(1+i)}$$

$$\mathbf{A} = F \div \left|\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right|$$

Fórmulas valor presente de una anualidad anticipada

$$\mathbf{P} = A\left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|(1+i)$$

$$\mathbf{n} = \frac{-\log\left(1-\frac{Pi}{A(1+i)}\right)}{\log(1+i)}$$

$$\mathbf{A} = P \div \left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|(1+i)$$

Fórmulas valor presente de una anualidad vencida

$$\mathbf{P} = A\left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\log\left(1-\frac{Pi}{A}\right)}{\log(1+i)}$$

$$\mathbf{A} = P \div \left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|$$

Fórmulas valor presente de una anualidad diferida

$$\mathbf{P} = A\left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|(1+i)^{-k}$$

$$\mathbf{A} = P \div \left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|(1+i)^{-k}$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\log\left(1-\frac{Pi}{A(1+i)^{-k}}\right)}{\log(1+i)}$$

$$\mathbf{k} = -\frac{\log\left(P \div \frac{A\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{i}\right)}{\log(1+i)}$$

Fórmulas valor presente de una anualidad perpetua

$$\mathbf{P} = \frac{A}{i}$$

$$\mathbf{i} = \frac{A}{P}$$

$$A = P \text{ x } i$$

PROBLEMAS

1. Un empresario solicita a un banco, del cual es cliente preferencial, que le preste 100 millones de COP para ser pagados en 60 pagos trimestrales de A cada uno, pero también solicita que le permitan pagar su primera cuota hasta un año después de recibir el préstamo ya que el dinero será utilizado para sufragar gastos de una importación de maquinaria. Determinar la A con una tasa del 2%tv. **Respuesta: 3.113.937.**
2. Hallar el valor presente de pago perpetuo mensual de 100.000 um, suponiendo una tasa de interés del 10,5%a. **Respuesta: 11.968.657,89.**
3. Calcule la TEA de una serie de pagos perpetuos mensuales de 407.412,38, de una inversión equivalente a 100.000.000 um. **Respuesta: 5%EA.**
4. Encontrar el valor de la incógnita teniendo en cuenta las siguientes variables:

$$A = 5.963.409{,}99 \qquad i = 8{,}24\%EA \qquad n = 3 \text{ años}$$
$$k = 6 \qquad kp = tv \qquad P = ?$$

Respuesta: 56.000.000.

6. Leasing

"Se define como un contrato de arredramiento financiero, y sus características están dadas por las definidas en las anualidades, también se ve como una forma de financiación"

6.1 OBJETIVO

Conocer las herramientas que permitan a las empresas o las familias financiar y adquirir un activo sin contar con los recursos financieros necesarios para comprarlo.

6.2 DEFINICIÓN

El leasing es un término inglés que se utiliza para identificar lo que se conoce como arrendamiento financiero, es decir, el propietario de un activo cede su bien para ser administrado y usufructuado por otro, teniendo en cuenta el tiempo o la duración del contrato, una tasa de interés y finalmente una opción de compra, para el caso de leasing financiero. (Meza, 2017)

Desde décadas atrás esta modalidad de financiación viene tomando fuerza hasta hoy, cuando cuenta con ventajas operativas, financieras y contributivas. (Triana, 2021)

6.3 TIPOS DE LEASING

En el ámbito financiero y normativo existen dos tipos de contratos de arrendamientos, estos son el leasing operativo y el financiero.

El leasing operativo es aquel en el cual el dueño del activo (arrendador) cede su bien a una empresa o persona (arrendatario) para ser utilizado por un tiempo acordado, este se obliga a pagar periódicamente al arrendador una cuota o canon, determinado por el valor del activo más impuestos, el tiempo de contrato y la tasa de interés; al finalizar los términos el activo es regresado a su propietario. (Triana, 2021)

Por su parte, el leasing financiero cuenta con las mismas características que el operativo, salvo que para determinar el canon es necesario tener en cuenta el valor futuro del activo, que se establece con un porcentaje del valor inicial de este y que comúnmente se denomina opción de compra, la cual al final del contrato puede ser tomada por el arrendador para ser pagada y quedar como propietario del activo. (Triana, 2021)

6.4 VENTAJAS GENERALES

- No es necesario contar con el valor total del dinero para adquirir el bien.
- No se incurre en gastos administrativos como mantenimiento, depreciación y pago de impuestos.
- Se mantiene un bien de acuerdo con las necesidades y tecnologías requeridas.
- Es posible cambiar o actualizar el activo.
- Ajusta el flujo de caja del arrendador y el arrendatario.
- Sus trámites son fáciles y rápidos.
- Se libera la capacidad de pago y endeudamiento.
- Se puede adquirir un bien nacional e importado.
- Otros.

6.5 DESVENTAJAS

- No es posible entregar el activo antes del término del contrato.
- Cláusulas penales por incumplimiento.
- Finalmente, en algunos casos no es factible tomar como opción de compra el bien.

6.6 VARIABLES

Para el desarrollo del contrato de arrendamiento-leasing, se tendrá en cuenta la siguiente nomenclatura.

- VA = Valor del activo
- i = Tasa de interés.
- n = Tiempo o plazo del contrato.
- Cn = Canon o alícuota.
- OpC = Opción de compra.
- Kp = Capitalización.

"El leasing es una modalidad de anualidad en la cual los pagos o el canon son uniformes durante el plazo del contrato".

Fx Fórmulas

$$\mathbf{Cn} = \frac{\mathbf{VA} - \mathbf{opC}(1+\mathbf{i})^{-\mathbf{n}}}{\left[\dfrac{1-(1+\mathbf{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathbf{i}}\right]}$$

6.7 LEASING OPERATIVO

En casos de aplicación del leasing operativo, se da para elementos o activos que pierden vigencia rápidamente o que su proceso de obsolescencia es muy acelerado, como es el caso de la tecnología. (Triana, 2021)

Como ya se vio anteriormente, en el leasing operativo el activo regresa a su propietario una vez venzan los términos del contrato. Ver el siguiente caso:

Ejemplo 1

Una empresa metalúrgica tomó un contrato de arrendamiento operativo con el fin de mejorar su proceso productivo, en el cual se pacta con la empresa de leasing los siguientes términos: valor del activo 350 millones, tiempo del contrato un año, tasa de interés 15,5%EA y pagos mensuales vencidos. Teniendo en cuenta lo anterior, ¿cuál será el valor del canon por pagar mes a mes?

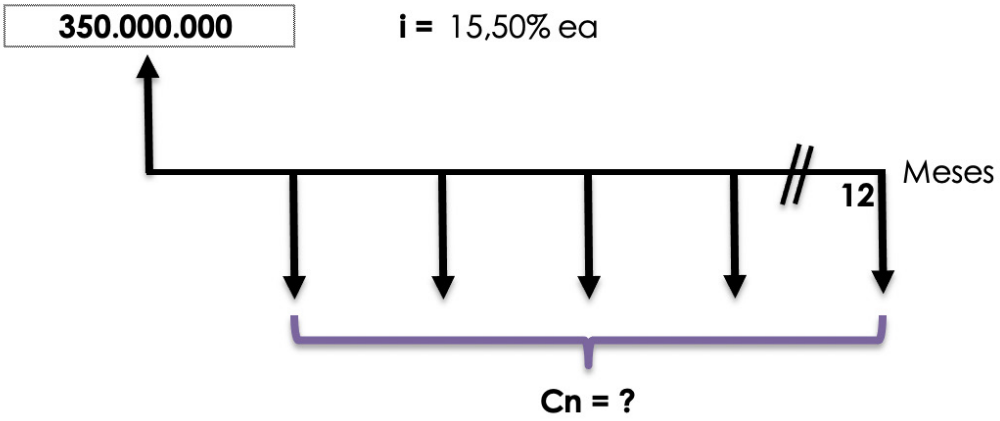
Solución:

VA = 350.000.000 i = 15,5% n = 1 Kp = mensual Cn = ?

Como la forma de pago es mes vencido, es necesario pasar a meses la tasa y el tiempo.

$$ip = [1 + 0{,}155]^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}0120808 \qquad n = 1 \times 12 = 12$$

Gráfica 6-1. Canon leasing operativo



Como se trata de leasing operativo, la fórmula tiene una variación o simplemente en la general se debe sustituir por cero la opción de compra.

Fx Fórmulas

$$\mathbf{Cn} = \mathbf{VA} \div \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$\mathbf{Cn} = 350.000.000 \div \left[\frac{1-(1+0,0120808)^{-12}}{0,0120808} \right]$$

$$Cn = 31.507.380$$

Respuesta: El valor que debe pagar el arrendatario al final de cada mes durante un año como canon es de **31.507.380.**

6.8 LEASING OPERATIVO EN EXCEL

Como se mencionó anteriormente, el cálculo del leasing funciona con la misma temática de una anualidad, por ende, para su cálculo en Excel, se utiliza la opción PAGO para determinar el canon. Ver cómo desarrollarlo.

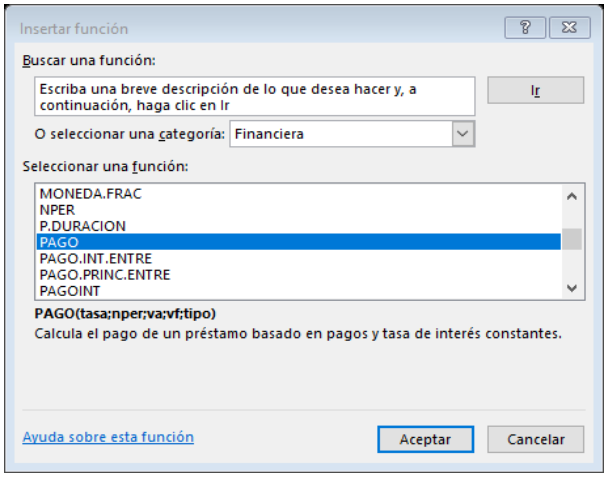
Para ello se elaborará una tabla en Excel con los datos del caso desarrollado del ejemplo 1.

Tabla 6-1. Canon de leasing operativo

Valor del activo	350.000.000	350.000.000
Tiempo (años)	1	12
Tasa de interés (EA)	15,5%	0,0120808
Opción de compra	0%	0
Capitalización	Mensual	12
Canon	?	

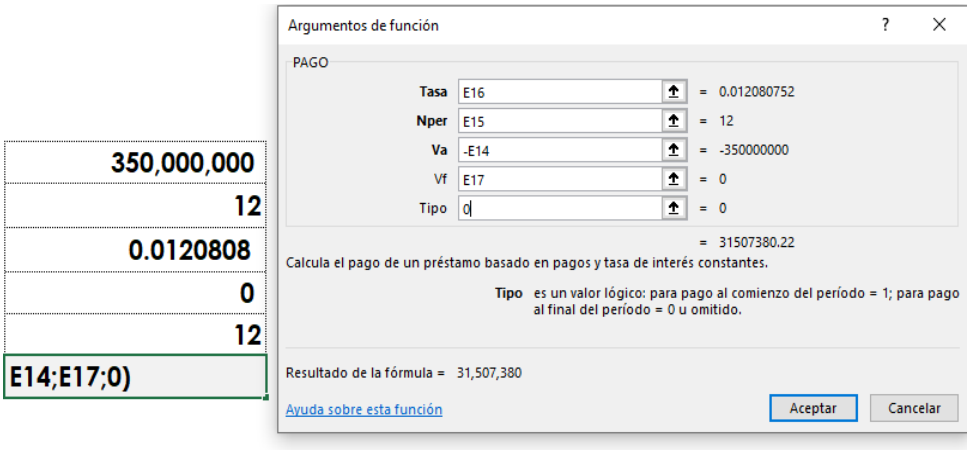
Después, desde la celda gris insertar la función financiera y opción PAGO, ver cómo es esto:

Imagen 45. Función PAGO



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya esta contenida en la tabla como tasa de interés y número de periodos o tiempo; el valor actual será el valor del activo y tendrá un signo negativo, luego el valor futuro cero y finalmente el tipo, que para este caso es 0, finalmente dar clic en *Aceptar*.

Imagen 46. Función PAGO variables



Después de tener las variables listas, se observa que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Valor del activo	350.000.000	350.000.000
Tiempo (años)	1	12
Tasa de interés (EA)	15,5%	0,0120808
Opción de compra	0%	0
Capitalización	Mensual	12
Canon	?	31.507.380

Respuesta: El valor que debe pagar el arrendatario al final de cada mes durante un año como canon es de **31.507.380.**

En caso de que el problema requiera hallar el valor de otra variable, a continuación, se encuentran las fórmulas despejadas.

Fx Fórmulas

Cómo hallar el valor del activo - Leasing operativo. En Excel se hallaría con la opción VA.

$$\mathbf{VA} = \mathrm{Cn}\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right]$$

Fx Fórmulas

Cómo hallar el tiempo - Leasing operativo. En Excel se hallaría con la opción NPER.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathrm{LOG}\left(1-(\mathrm{VA}\cdot\mathrm{i})\div\mathrm{Cn}\right)}{\mathrm{LOG}\left(1+\mathrm{i}\right)}$$

6.9 LEASING FINANCIERO

El leasing financiero es el tipo de arrendamiento en el cual el tomador al arrendar cuenta con la posibilidad de pagar un valor adicional denominado opción de compra, éste de da una vez termine el contrato y contar con la posibilidad de pasar de arrendador a propietario del bien. (Triana, 2021)

Ver algunos ejemplos.

Ejemplo 2

Una empresa metalmecánica tomó un contrato de arrendamiento financiero por una máquina con el fin de mejorar su proceso productivo. Se pacta con la empresa de leasing los siguientes términos: valor del activo 300 millones, tiempo del contrato dos años, tasa de interés 20%EA, una opción de compra del 10%y pagos mensuales vencidos. Teniendo en cuenta lo anterior, ¿cuál será el valor del canon por pagar mes a mes?

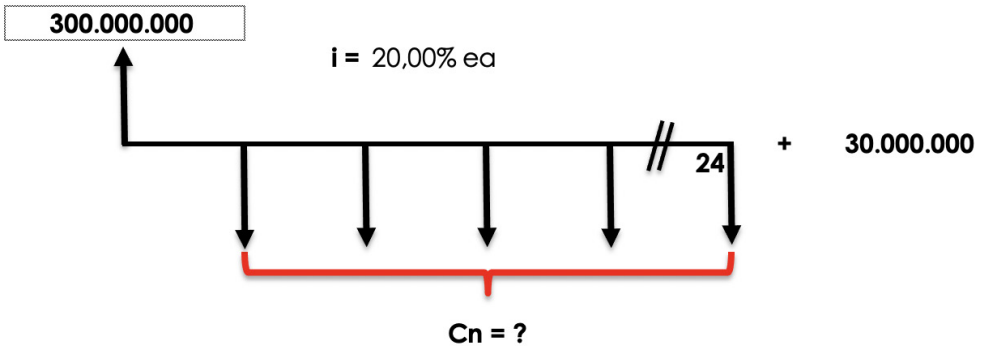
Solución:

$$VA = 300.000.000 \quad i = 20\% \quad n = 2 \quad opC = 10\% \quad Kp = 12 \quad Cn = ?$$

Como la forma de pago es mes vencido, es necesario pasar a meses la tasa y el tiempo.

$$ip = [1 + 0,20]^{\frac{1}{12}} - 1 = \qquad 0.0153095 \qquad\qquad n = 2 \text{ x } 12 = 24$$

Gráfica 6-2. Canon leasing financiero



Fx Fórmulas

$$Cn = \frac{VA - opC\left(1+i\right)^{-n}}{\left[\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}\right]}$$

$$\mathbf{Cn} = \frac{300.000.000 - 30.000.000\left(1+0,0153095\right)^{-24}}{\left[\frac{1-\left(1+0,0153095\right)^{-24}}{0,0153095}\right]}$$

$$Cn = 13.987.289$$

Respuesta: El valor que debe pagar el arrendatario al final de cada mes durante dos años como canon es de **13.987.289,** y en caso de optar por la opción de compra y quedarse con el activo deberá pagar 30 millones adicionales.

Ejemplo 3

Una empresa social del Estado tomó un contrato de arrendamiento financiero para adquirir maquinaria pesada con el fin de mejorar sus servicios en obras públicas, los términos que pactó con la empresa

de leasing son: tiempo del contrato 3 años, tasa de interés 16%EA, una opción de compra de 50 millones de COP y pagos mensuales vencidos por valor de 16.207.151. Teniendo en cuenta lo anterior, ¿cuál será el valor de la maquinaria tomada en leasing?

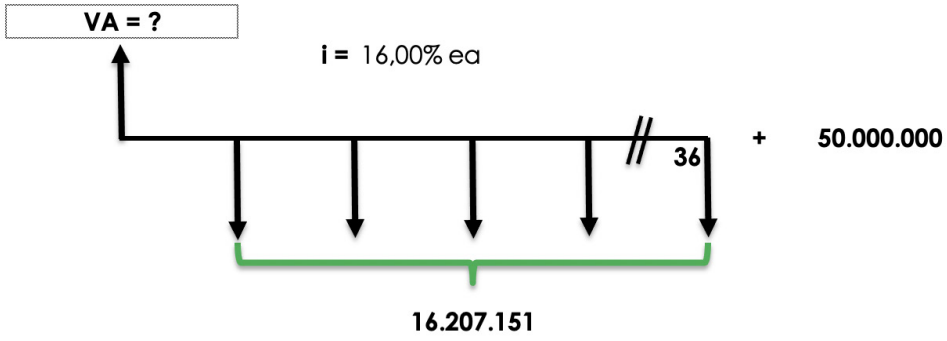
Solución:

opC = 50 M i = 16% n = 3 Cn = 16.207.151 Kp = mensual VA = ?

Como la forma de pago es mes vencido, es necesario pasar a meses la tasa y el tiempo.

$$ip = \left[1 + 0{,}16\right]^{\frac{1}{12}} - 1 = \quad 0{,}0124451 \qquad n = 3 \text{ x } 12 = 36$$

Gráfica 6-3. Valor del activo leasing financiero



Fx Fórmulas

$$\mathbf{VA} = \mathbf{Cn}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \mathbf{opC}(1+i)^{-n}$$

$$\mathbf{VA} = 16.207.151\left[\frac{1-(1+0{,}0124451)^{-36}}{0{,}0124451}\right] + 50.000.000\,(1+0{,}0124451)^{-36}$$

VA = 500.000.003

Respuesta: El valor de la maquinaria tomada en leasing por 3 años tiene un valor de **500.000.003** y en caso de optar por la opción de compra y quedarse con el activo deberá pagar 50 millones más.

6.10 LEASING FINANCIERO EN EXCEL

Ejemplo 4

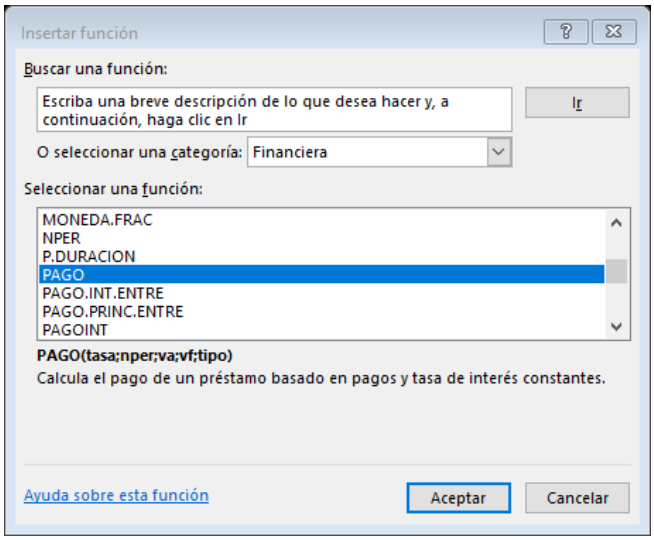
Con Excel el proceso es exactamente igual al leasing operativo, salvo que en el valor futuro el valor es la opción de compra. Ver el caso planteado desde una tabla en Excel, la cual solicita calcular el valor del canon.

Tabla 6-2. Canon de leasing financiero a través de Excel

Valor del activo	300.000.000	300.000.000
Tiempo (años)	2	24
Tasa de interés (EA)	20%	0,0153095
Opción de compra	10%	30.000.000
Capitalización	Mensual	12
Canon	?	

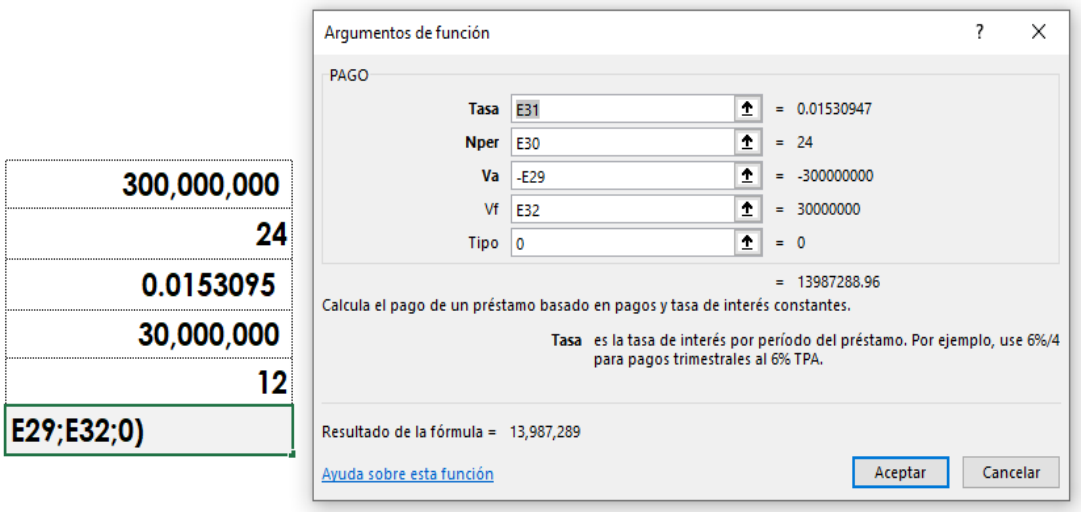
Después, desde la celda gris se debe insertar la función financiera y luego la opción PAGO, ver cómo es esto:

Imagen 47. Función PAGO



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya contiene la tabla como tasa de interés y número de periodos o tiempo; el valor actual será el valor del activo y tendrá un signo negativo, el valor futuro será la opción de compra en valores y, finalmente, el tipo que para este caso es 0.

Imagen 48. Función PAGO variables



Luego de tener las variables listas, se observa que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Valor del activo	300.000.000	300.000.000
Tiempo (años)	2	24
Tasa de interés (EA)	20%	0,0153095
Opción de compra	10%	30.000.000
Capitalización	Mensual	12
Canon	?	13.987.289

Respuesta: El valor que debe pagar el arrendatario al final de cada mes durante dos años como canon es de 13.987.289 y en caso de optar por la opción de compra y quedarse con el activo deberá pagar 30 millones más.

Ejemplo 5

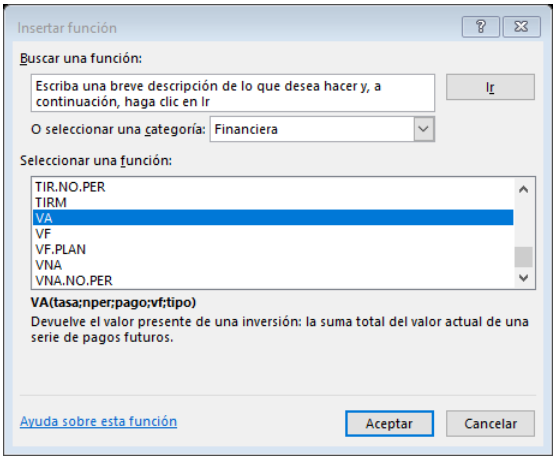
En este ejemplo se calculará el valor del activo financiado mediante leasing financiero y se planteará el caso en una tabla de Excel, ver cómo hacerlo:

Tabla 6-3. Valor del activo de leasing financiero a través de Excel

Canon	16.207.151	16.207.151
Tiempo (años)	3	36
Tasa de interés (EA)	16 %	0,0124451
Opción de compra		50.000.000
Capitalización	Mensual	12
Valor de activo	?	

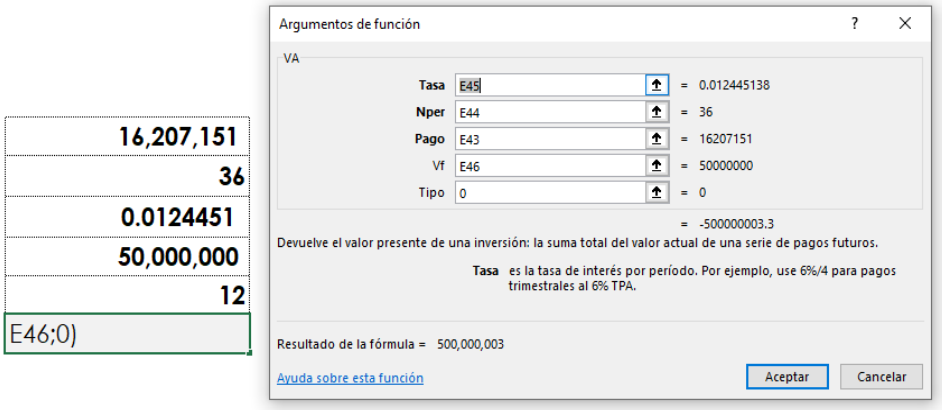
Después, desde la celda gris se debe hincar la función financiera, opción VA. Antes de insertar la función es necesario anteponer un signo menos. Así:

Imagen 49. Función VA



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya se tienen en la tabla que contiene las variables: canon o pago, número de periodos o tiempo, tasa de interés, la opción de compra que para nuestro caso será el valor futuro y, finalmente, el tipo, que para este caso es cero (0). Luego de tener las variables listas, se observa que el resultado ya aparece previsualizado y es negativo, por tal motivo antes de insertar la función es necesario el sigo negativo. Finalmente pulsar en *Aceptar*.

Imagen 50. Función VA variables



Canon	16.207.151	16.207.151
Tiempo (años)	3	36
Tasa de interés (EA)	16 %	0,0124451
Opción de compra		50.000.000
Capitalización	Mensual	12
Valor de activo	?	500,000,003

Respuesta: El valor del activo tomado en arriendo con opción de compra según información es de **500.000.003.**

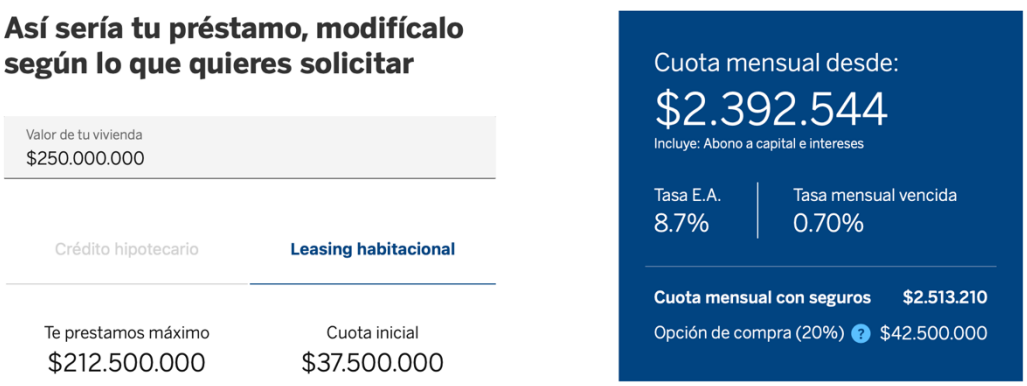
6.11 LEASING HABITACIONAL

Actualmente, esta forma de adquirir vivienda propia está tomando bastante fuerza en el mercado financiero colombiano; dadas las ventajas que tiene en cuestión de: impuestos, tasas de interés, opción de compra y demás.

EJEMPLO 6

Una persona desea conocer con exactitud, como será el comportamiento de un contrato de leasing habitacional con un banco local para adquirir su apto en el distrito capital.

Por lo anterior, esta persona acude a un experto en finanzas que le apoye en su incertidumbre, para lo cual le da a conocer una información que la entidad bancaria le suministro, en la cual para comprar un apto con un valor comercial de 250 millones de COP, el valor a prestar será de 212.500.000 de COP, como se muestra a continuación:



Por lo anterior, el interesado desea conocer cuál será el comportamiento de los pagos suponiendo un seguro constante de 80.000 COP por veinte años con pagos mensuales.

Solución:

$$opC = 20\% \qquad i = 8{,}7\% \qquad n = 10 \qquad VA = 212.500.000$$

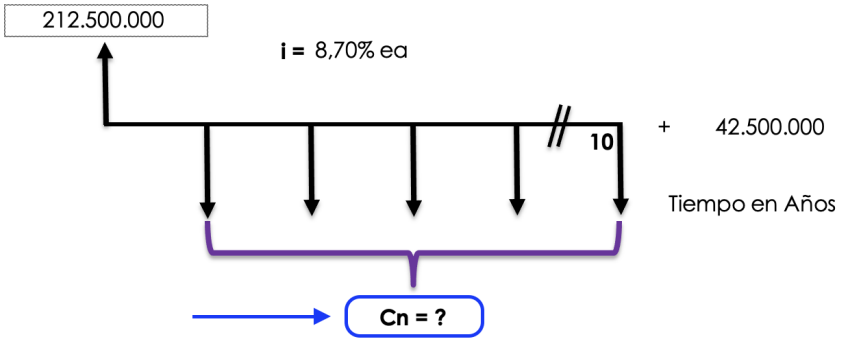
$$Sg = 80.000 \qquad Kp = mv \qquad Cn = ?$$

Como la forma de pago es mes vencido, es necesario pasar a meses la tasa y el tiempo.

$$ip = \left[1 + 0{,}087\right]^{\frac{1}{12}} - 1 = \quad 0{,}0069760 \qquad n = 10 \text{ x } 12 = 120$$

$$OpC = 212.500.0000 \text{ x } 0{,}2 = 42.500.000$$

Gráfica 6-4. Leasing habitacional



Fx Fórmulas

$$\mathbf{Cn} = \mathbf{VA} \div \left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathrm{i}} \right] + \mathbf{opC}(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{VA} = 212.500.000 \div \left[\frac{1-(1+0,006976)^{-120}}{0,006976} \right] + 42.500.000\,(1+0,006976)^{-120}$$

$$\mathrm{Cn} = 2.392.547$$

$$\mathrm{Cn} + \mathrm{Seguro} = 2.392.547 + 80.000 = 2.472.547$$

Si se soluciona en Excel, se debe elaborar un matriz como la siguiente:

Tabla 6-4. Canon de leasing habitacional a través de Excel

Valor del Activo	212.500.000	212.500.000
Tiempo (Años)	10	120
Tasa de Interés (EA)	8,70%	0,0069760
Opción de Compra	20,00%	42.500.000
Capitalización	MV	12
Seguro	80.000	80.000
Canon	?	
Canon + Seguro	?	

Valor del Activo	212.500.000
Tiempo (Años)	10
Tasa de Interés (EA)	8,70%
Opción de Compra	20,00%
Capitalización	MV
Seguro	80.000
Canon	?
Canon + Seguro	?

212.500.000
120
0,0069760
42.500.000
12
80.000
=PAGO(E102;E101;-E100;E103;0)

PAGO(tasa; nper; va; [vf]; [tipo])

Valor del Activo	212.500.000	212.500.000
Tiempo (Años)	10	120
Tasa de Interés (EA)	8,70%	0,0069760
Opción de Compra	20,00%	42.500.000
Capitalización	MV	12
Seguro	80.000	80.000
Canon	?	2.392.547
Canon + Seguro	?	2.472.547

Respuesta: De este modo en valor mensual más seguro para el leasing habitacional corresponde a **2.392.547 COP.**

La tabla de amortización o comportamiento de los pagos la cual incluye: el abono al capital, intereses, canon o cuota, seguro y saldo será de la siguiente manera:

Tabla 6-5. Comportamiento pagos

Periodo	Capital	intereses	Canon	Seguro	Canon+Seguro	Saldo
0	0	0	0	0	0	212.500.000
1	910.143	1.482.404	2.392.547	80.000	2.472.547	211.589.857
2	916.492	1.476.055	2.392.547	80.000	2.472.547	210.673.365
3	922.886	1.469.662	2.392.547	80.000	2.472.547	209.750.479
4	929.324	1.463.224	2.392.547	80.000	2.472.547	208.821.156
5	935.807	1.456.741	2.392.547	80.000	2.472.547	207.885.349
6	942.335	1.450.212	2.392.547	80.000	2.472.547	206.943.014
7	948.909	1.443.639	2.392.547	80.000	2.472.547	205.994.106
8	955.528	1.437.019	2.392.547	80.000	2.472.547	205.038.578
9	962.194	1.430.353	2.392.547	80.000	2.472.547	204.076.384
10	968.906	1.423.641	2.392.547	80.000	2.472.547	203.107.477
11	975.665	1.416.882	2.392.547	80.000	2.472.547	202.131.812
12	982.472	1.410.076	2.392.547	80.000	2.472.547	201.149.340
13	989.325	1.403.222	2.392.547	80.000	2.472.547	200.160.015
14	996.227	1.396.320	2.392.547	80.000	2.472.547	199.163.788
15	1.003.177	1.389.371	2.392.547	80.000	2.472.547	198.160.611
16	1.010.175	1.382.372	2.392.547	80.000	2.472.547	197.150.437
17	1.017.222	1.375.325	2.392.547	80.000	2.472.547	196.133.215
18	1.024.318	1.368.229	2.392.547	80.000	2.472.547	195.108.897
19	1.031.464	1.361.084	2.392.547	80.000	2.472.547	194.077.433
20	1.038.659	1.353.888	2.392.547	80.000	2.472.547	193.038.774
21	1.045.905	1.346.642	2.392.547	80.000	2.472.547	191.992.869

Periodo	Capital	intereses	Canon	Seguro	Canon+Seguro	Saldo
22	l.053.201	1.339.346	2.392.547	80.000	2.472.547	190.939.668
23	1.060.548	1.331.999	2.392.547	80.000	2.472.547	189.879.120
24	1.067.947	1.324.601	2.392.547	80.000	2.472.547	188.811.173
25	1.075.397	1.317.151	2.392.547	80.000	2.472.547	187.735.777
26	1.082.899	1.309.649	2.392.547	80.000	2.472.547	186.652.878
27	1.090.453	1.302.094	2.392.547	80.000	2.472.547	185.562.425
28	1.098.060	1.294.487	2.392.547	80.000	2.472.547	184.464.365
29	1.105.720	1.286.827	2.392.547	80.000	2.472.547	183.358.645
30	1.113.434	1.279.114	2.392.547	80.000	2.472.547	182.245.211
31	1.121.201	1.271.346	2.392.547	80.000	2.472.547	181.124.01O
32	1.129.022	1.263.525	2.392.547	80.000	2.472.547	179.994.988
33	1.136.899	1.255.649	2.392.547	80.000	2.472.547	178.858.089
34	1.144.830	l.247.718	2.392.547	80.000	2.472.547	177.713.260
35	l.152.816	1.239.731	2.392.547	80.000	2.472.547	176.560.444
36	1.160.858	1.231.689	2.392.547	80.000	2.472.547	175.399.586
37	1.168.956	1.223.591	2.392.547	80.000	2.472.547	174.230.630
38	1.177.111	1.215.436	2.392.547	80.000	2.472.547	173.053.519
39	1.185.322	1.207.225	2.392.547	80.000	2.472.547	171.868.196
40	1.193.591	1.198.956	2.392.547	80.000	2.472.547	170.674.605
41	1.201.918	1.190.630	2.392.547	80.000	2.472.547	169.472.687
42	1.210.302	1.182.245	2.392.547	80.000	2.472.547	168.262.385
43	1.218.745	1.173.802	2.392.547	80.000	2.472.547	167.043.640
44	1.227.247	1.165.300	2.392.547	80.000	2.472.547	165.816.392

Periodo	Capital	intereses	Canon	Seguro	Canon+Seguro	Saldo
45	1.235.809	1.156.739	2.392.547	80.000	2.472.547	164.580.583
46	1.244.430	1.148.118	2.392.547	80.000	2.472.547	163.336.154
47	1.253.111	1.139.436	2.392.547	80.000	2.472.547	162.083.043
48	1.261.853	1.130.695	2.392.547	80.000	2.472.547	160.821.190
49	1.270.655	1.121.892	2.392.547	80.000	2.472.547	159.550.535
50	1.279.519	1.113.028	2.392.547	80.000	2.472.547	158.271.015
51	1.288.445	1.104.102	2.392.547	80.000	2.472.547	156.982.570
52	1.297.434	1.095.114	2.392.547	80.000	2.472.547	155.685.136
53	1.306.485	1.086.063	2.392.547	80.000	2.472.547	154.378.651
54	1.315.599	1.076.949	2.392.547	80.000	2.472.547	153.063.053
55	1.324.776	1.067.771	2.392.547	80.000	2.472.547	151.738.276
56	1.334.018	1.058.529	2.392.547	80.000	2.472.547	150.404.259
57	1.343.324	1.049.223	2.392.547	80.000	2.472.547	149.060.934
58	1.352.695	1.039.852	2.392.547	80.000	2.472.547	147.708.239
59	1.362.132	1.030.416	2.392.547	80.000	2.472.547	146.346.108
60	1.371.634	1.020.913	2.392.547	80.000	2.472.547	144.974.474
61	1.381.202	1.011.345	2.392.547	80.000	2.472.547	143.593.271
62	1.390.838	1.001.71O	2.392.547	80.000	2.472.547	142.202.434
63	1.400.540	992.007	2.392.547	80.000	2.472.547	140.801.894
64	1.410.31O	982.237	2.392.547	80.000	2.472.547	139.391.583
65	1.420.149	972.399	2.392.547	80.000	2.472.547	137.971.434
66	1.430.056	962.492	2.392.547	80.000	2.472.547	136.541.379
67	1.440.032	952.515	2.392.547	80.000	2.472.547	135.1O1.347

Periodo	Capital	intereses	Canon	Seguro	Canon+Seguro	Saldo
68	1.450.078	942.470	2.392.547	80.000	2.472.547	133.651.269
69	1.460.193	932.354	2.392.547	80.000	2.472.547	132.191.076
70	1.470.380	922.168	2.392.547	80.000	2.472.547	130.720.696
71	1.480.637	911.910	2.392.547	80.000	2.472.547	129.240.059
72	1.490.966	901.581	2.392.547	80.000	2.472.547	127.749.093
73	1.501.367	891.180	2.392.547	80.000	2.472.547	126.247.726
74	1.511.841	880.707	2.392.547	80.000	2.472.547	124.735.886
75	1.522.387	870.160	2.392.547	80.000	2.472.547	123.213.499
76	1.533.007	859.540	2.392.547	80.000	2.472.547	121.680.491
77	1.543.702	848.846	2.392.547	80.000	2.472.547	120.136.790
78	1.554.471	838.077	2.392.547	80.000	2.472.547	118.582.319
79	1.565.315	827.233	2.392.547	80.000	2.472.547	117.017.004
80	1.576.234	816.313	2.392.547	80.000	2.472.547	115.440.770
81	1.587.230	805.317	2.392.547	80.000	2.472.547	113.853.540
82	1.598.303	794.245	2.392.547	80.000	2.472.547	112.255.237
83	1.609.452	783.095	2.392.547	80.000	2.472.547	110.645.785
84	1.620.680	771.867	2.392.547	80.000	2.472.547	109.025.105
85	1.631.986	760.561	2.392.547	80.000	2.472.547	107.393.119
86	1.643.371	749.177	2.392.547	80.000	2.472.547	105.749.748
87	1.654.835	737.712	2.392.547	80.000	2.472.547	104.094.913
88	1.666.379	726.168	2.392.547	80.000	2.472.547	102.428.534
89	1.678.004	714.544	2.392.547	80.000	2.472.547	100.750.531
90	1.689.710	702.838	2.392.547	80.000	2.472.547	99.060.821

Periodo	Capital	intereses	Canon	Seguro	Canon+Seguro	Saldo
91	1.701.497	691.050	2.392.547	80.000	2.472.547	97.359.324
92	1.713.367	679.181	2.392.547	80.000	2.472.547	95.645.957
93	1.725.319	667.228	2.392.547	80.000	2.472.547	93.920.638
94	1.737.355	655.192	2.392.547	80.000	2.472.547	92.183.283
95	1.749.475	643.072	2.392.547	80.000	2.472.547	90.433.809
96	1.761.679	630.868	2.392.547	80.000	2.472.547	88.672.129
97	1.773.969	618.579	2.392.547	80.000	2.472.547	86.898.161
98	1.786.344	606.203	2.392.547	80.000	2.472.547	85.111.817
99	1.798.806	593.742	2.392.547	80.000	2.472.547	83.313.011
100	1.811.354	581.193	2.392.547	80.000	2.472.547	81.501.657
101	1.823.990	568.557	2.392.547	80.000	2.472.547	79.677.667
102	1.836.714	555.833	2.392.547	80.000	2.472.547	77.840.953
103	1.849.527	543.020	2.392.547	80.000	2.472.547	75.991.426
104	1.862.430	530.118	2.392.547	80.000	2.472.547	74.128.996
105	1.875.422	517.125	2.392.547	80.000	2.472.547	72.253.574
106	1.888.505	504.042	2.392.547	80.000	2.472.547	70.365.069
107	1.901.679	490.868	2.392.547	80.000	2.472.547	68.463.390
108	1.914.945	477.602	2.392.547	80.000	2.472.547	66.548.445
109	1.928.304	464.243	2.392.547	80.000	2.472.547	64.620.141
110	1.941.756	450.791	2.392.547	80.000	2.472.547	62.678.385
111	1.955.302"	437.246	2.392.547	80.000	2.472.547	60.723.084
112	1.968.942	423.605	2.392.547	80.000	2.472.547	58.754.142
113	1.982.677	409.870	2.392.547	80.000	2.472.547	56.771.465

Periodo	Capital	intereses	Canon	Seguro	Canon+Seguro	Saldo
114	1.996.508	396.039	2.392.547	80.000	2.472.547	54.774.956
115	2.010.436	382.111	2.392.547	80.000	2.472.547	52.764.520
116	2.024.461	368.086	2.392.547	80.000	2.472.547	50.740.059
117	2.038.584	353.964	2.392.547	80.000	2.472.547	48.701.476
118	2.052.805	339.742	2.392.547	80.000	2.472.547	46.648.671
119	2.067.125	325.422	2.392.547	80.000	2.472.547	44.581.546
120	2.081.546	311.002	2.392.547	80.000	2.472.547	42.500.000

Al final de la tabla de amortización, el saldo es el correspondiente a la opción de compra, que para el caso equivale a 42.500.000 de COP si se toma la opción de compra del apto.

PROBLEMAS

Caso 1:

Cn = ? VA = 250.000 USD OpC = 12% i = 15,5%EA

n = 5 años k = Trimestre vencido

Respuesta: 16.816 USD

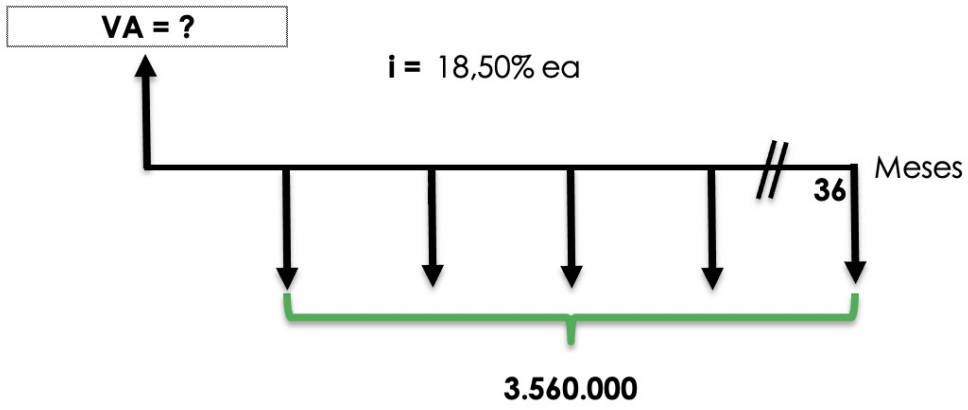
Caso 2:

Suponga que usted es el coordinador de recursos físicos de una entidad del Estado y está en la disyuntiva entre comprar una máquina que vale 180.000.000 o tomarla con la figura de leasing con las siguientes condiciones: contrato

a un año, una tasa del 17,17%EA, canon de $16.747.486 mes vencido y una opción de compra por $ 30.000.000.

Respuesta: Comprar el activo.

Caso 3:



Nota: La capitalización para el caso 3 es mes vencido.

Respuesta: 99.719.959.

Caso 4:

Cn = ? VA = 250.000.000 OpC = 10% i = 17,5%EA

n = 3 años k = Mes vencido

Respuesta: 8.274.779

7. Gradientes

"Se definen como una serie de pagos variables, los cuales contienen una constante de incremento o disminución a lo largo del tiempo"

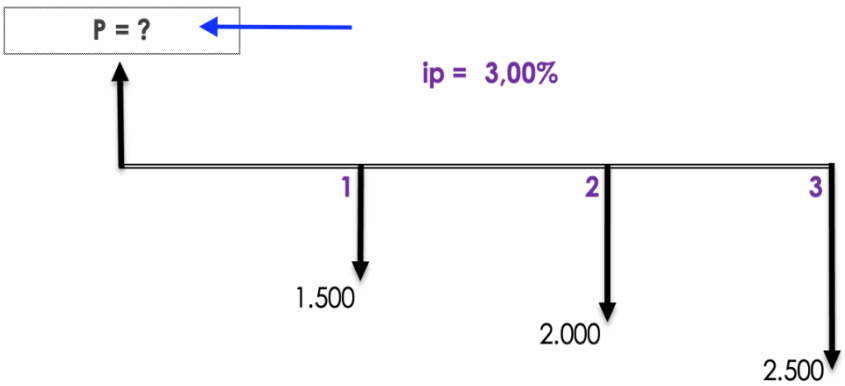
7.1 DEFINICIÓN

Los gradientes, o también denominados series variables, son pagos que aumentan o disminuyen periodo a periodo con respecto al inmediatamente anterior; esta variación constante se presenta en unidades absolutas o relativas. (Triana, 2021)

Los gradientes son muy utilizados en empresas que programan producción lineal y consecuentemente sus costos y gastos también se elevan o disminuyen de manera gradual, sin embargo, estos cálculos matemáticos en la práctica son muy difíciles que se presenten. (Meza, 2017)

Ver cómo lo anterior se refleja gráficamente.

Gráfica 7-1. Comportamiento de un gradiente



$$P = \frac{1.500}{(1+0,03)^1} \quad \frac{2.000}{(1+0,03)^2} \quad \frac{2.500}{(1+0,03)^3}$$

$$P = \boxed{1.456} + \boxed{1.885} + \boxed{2.288}$$

$$P = \boxed{5.629}$$

El gráfico muestra cómo un primer pago de 1.500 aumenta en 500 para el segundo y tercer pago, siendo este de 2.500 y 3.000, respectivamente; de igual manera, considerando una tasa de interés del 3% el valor presente de estos pagos sería igual a 5.629.

7.2 CARACTERÍSTICAS DE UN GRADIENTE

Teniendo en cuenta lo visto en series uniformes o anualidades, estos guardan algunas características.

- Los pagos deben contener una constante de aumento o disminución.
- Los pagos deben guardar la misma periodicidad.
- Los pagos pueden ser traídos al presente o llevados al futuro.
- Igual número de pagos, igual número de periodos.

7.3 GRADIENTE LINEAL (Creciente)

El gradiente lineal o aritmético es constante en su variación, puede ser creciente o decreciente, el creciente es aquel que aumenta positivamente un valor constante durante todo el tiempo, y el decreciente es aquel cuya constante es negativa, es decir, disminuye periodo a periodo en la misma cantidad. (Triana, 2021)

Fx Fórmulas

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathrm{i}}\right] + \frac{\mathbf{G}}{\mathrm{i}}\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathrm{i}} - \mathbf{n}(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}\right]$$

$$\mathbf{F = C}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]+\frac{\mathbf{G}}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}-\mathbf{n}\right]$$

En las cuales:

- P = Valor presente o actual.
- F = Valor futuro.
- C = Valor de la primera cuota.
- i = Tasa de interés.
- G = Constante o gradiente.
- n = Tiempo o número de pagos.

Ejemplo 1

Una persona tomó un crédito para ser pagado en un año, en el cual empezó a pagar 956.030,1 el primer mes; la tasa de interés que la entidad cobraba era del 12,68%ea, a partir de la primera cuota realizó un incremento de 70.000 hasta el último pago. Si la capitalización es mes vencido, ¿cuál es valor del crédito tomado?

Solución:

Teniendo en cuenta que la capitalización es mes vencido se debe convertir la tasa efectiva a periódica, al igual que el tiempo en meses.

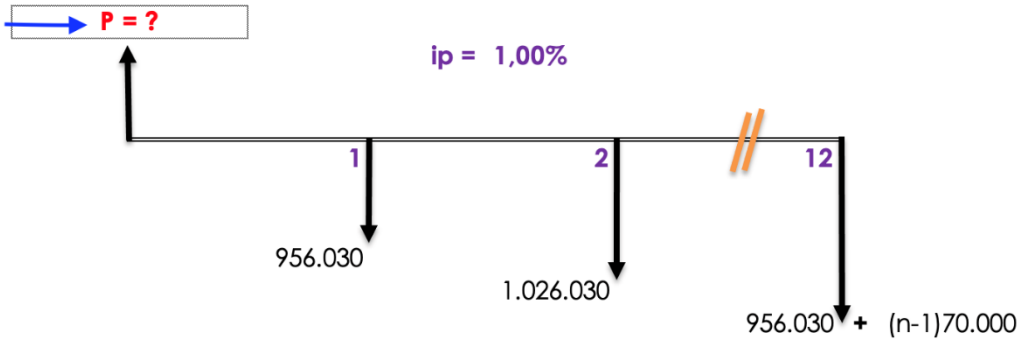
De esta forma se tendrá:

$$\mathbf{ip} = \left[1 + 0{,}1268\right]^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}01 \qquad n = 1 \text{ x } 12 = 12$$

En consecuencia, se tendrá lo siguiente:

C = 956.030,1 ip = 0,01 n = 12 kp = mv G = 70.000 P = ?

Gráfica 7-2. Valor presente de un gradiente lineal



Fx Fórmulas

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathrm{i}}\right] + \frac{\mathbf{G}}{\mathrm{i}}\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathrm{i}} - \mathbf{n}(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}\right]$$

$$\mathbf{P} = 956.030{,}1\left[\frac{1-(1+0{,}01)^{-12}}{0{,}01}\right] + \frac{70.000}{0{,}01}\left[\frac{1-(1+0{,}01)^{-12}}{0{,}01} - 12(1+0{,}01)^{-12}\right]$$

$$P = 15.000.000$$

Respuesta: El valor del crédito otorgado es igual a **15 millones**.

¿Cómo solucionar este problema de gradiente lineal en Excel?

Para ello se tomará un libro de Excel y luego elaborar una tabla con las variables necesarias, como la siguiente:

Tabla 7-1. Valor presente gradiente lineal creciente

Valor presente	?	?
Tiempo (años)	1	12
Tasa de interés (EA)	12,68%	0,01
Gradiente	70.000	70.000
Capitalización	Mensual	12
Valor primera cuota	956.030,1	956.030,1

Seguidamente, se debe construir una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Pago y Saldo.

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla: como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el doce (12). Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo, este será equivalente al valor del crédito o valor presente.

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

- Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés; se fija la tasa con F4.
- Amortización = Pago del periodo 1 menos los intereses del periodo 1.

- Pago = Valor de la primera cuota.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2):

- Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa.
- Amortización = Pago del periodo 2 menos los intereses del periodo 2.
- Pago = Pago del periodo 1 más el valor del gradiente y fijar el gradiente.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 menos la amortización del periodo 2.

Luego se selecciona desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y se arrastra hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así:

Tabla 7-2. Amortización del valor presente gradiente lineal creciente

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				15.000.000
1	150.000	806.030	956.030,1	14.193.970
2	141.940	884.090	1.026.030,1	13.309.880
3	133.099	962.931	1.096.030,1	12.346.948
4	123.469	1.042.561	1.166.030,1	11.304.388
5	113.044	1.122.986	1.236.030,1	10.181.401
6	101.814	1.204.216	1.306.030,1	8.977.185
7	89.772	1.286.258	1.376.030,1	7.690.927
8	76.909	1.369.121	1.446.030,1	6.321.806
9	63.218	1.452.812	1.516.030,1	4.868.994

10	48.690	1.537.340	1.586.030,1	3.331.654
11	33.317	1.622.714	1.656.030,1	1.708.941
12	17.089	1.708.941	1.726.030,1	0

Ejemplo 2

Una persona tomó un crédito de 15.000.000 para ser pagado en un año, la tasa de interés que la entidad cobraba era del 12,68% a partir de la primera cuota realizó un incremento de 70.000 periódicamente hasta el último pago; si la capitalización es mes vencido, ¿cuál es el valor de la primera cuota?

Solución:

Teniendo en cuenta que la capitalización es mes vencido se debe convertir la tasa efectiva a periódica, al igual que el tiempo en meses.

De esta forma se tendrá:

$$ip = [1 + 0{,}12683]^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}01 \qquad n = 1 \text{ x } 12 = 12$$

Y en consecuencia lo siguiente:

P = 15.000.000 ip = 0,01 n = 12 kp = mv G = 70.000 C = ?

Gráfica 7-3. Valor primera cuota de un gradiente lineal

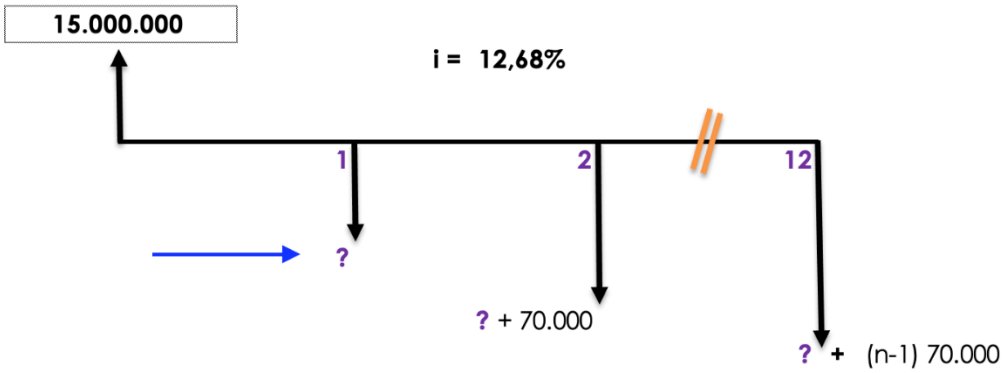


Tabla 7-3. Valor primera cuota gradiente lineal creciente

.Xls

Valor presente	15.000.000	15.000.000
Tiempo (años)	1	12
Tasa de interés (EA)	12,683 %	0,01
Gradiente	70.000	70.000
Capitalización	Mensual	12
Valor primera cuota	?	?

.Xls

Seguidamente, se construye una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Pago y Saldo.

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla: como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el doce (12). Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo, este será equivalente al valor del crédito o valor presente = P0.

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

- Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés, y fijar la tasa con F4.
- Amortización = Pago del periodo 1 menos los intereses del periodo 1.
- Pago = Dejarla en blanco por el momento.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2):

- Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés, y fijar la tasa.
- Amortización = Pago del periodo 2 menos los intereses del periodo 2.
- Pago = Pago del periodo 1 más el valor del gradiente y fijar este.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 menos la amortización del periodo 2.

Luego se selecciona desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y se arrastra hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				$= P_0$
1	$= P_0$ x ip	$= C_1 - Int_1$		$= P_0 - Amort_1$
2	$= P_1$ x ip	$= C_2 - Int_2$	$=C_1 + G$	$= P_1 - Amort_2$

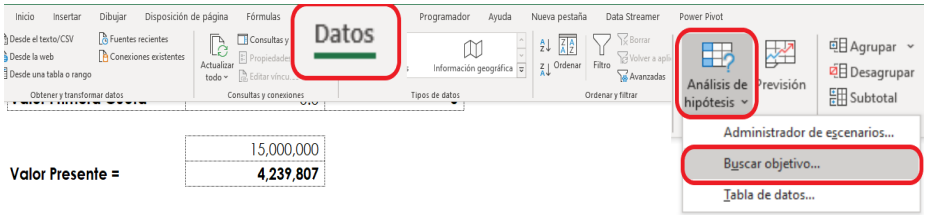
El resultado será el siguiente:

Tabla 7-4. Amortización cálculo primera cuota valor presente gradiente lineal creciente

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				15.000.000
1	150.000	-150.000		15.150.000
2	151.500	-81.500	70.000	15.231.500
3	152.315	-12.315	140.000	15.243.815
4	152.438	57.562	210.000	15.186.253
5	151.863	128.137	280.000	15.058.116
6	150.581	199.419	350.000	14.858.697
7	148.587	271.413	420.000	14.587.284
8	145.873	344.127	490.000	14.243.157
9	142.432	417.568	560.000	13.825.588
10	138.256	491.744	630.000	13.333.844
11	133.338	566.662	700.000	12.767.183
12	127.672	642.328	770.000	12.124.854

Luego de este proceso ubicarse en la celda gris, es decir, en el saldo del periodo 12, una vez ahí ir a la pestaña Datos, seleccionar la pestaña *Análisis de hipótesis* y ahí escoger la opción *Buscar objetivo...*, ver cómo es esto:

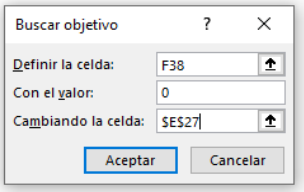
Imagen 51. Datos, Análisis de Hipótesis – Buscar Objetivo



	15,000,000
Valor Presente =	**4,239,807**

Intereses	Amortización	Pago	Saldo
			15,000,000
150,000	-150,000		15,150,000
151,500	-81,500	70,000.0	15,231,500
152,315	-12,315	140,000.0	15,243,815
152,438	57,562	210,000.0	15,186,253
151,863	128,137	280,000.0	15,058,116
150,581	199,419	350,000.0	14,858,697
148,587	271,413	420,000.0	14,587,284
145,873	344,127	490,000.0	14,243,157
142,432	417,568	560,000.0	13,825,588
138,256	491,744	630,000.0	13,333,844
133,338	566,662	700,000.0	12,767,183
127,672	642,328	770,000.0	12,124,854

Pago	Saldo
	15,000,000
	15,150,000
70,000.0	15,231,500
140,000.0	15,243,815
210,000.0	15,186,253
280,000.0	15,058,116
350,000.0	14,858,697
420,000.0	14,587,284
490,000.0	14,243,157
560,000.0	13,825,588
630,000.0	13,333,844
700,000.0	12,767,183
770,000.0	12,124,854



Luego, dar clic en *Buscar objetivo...* y aparecerá una ventana con tres (3) variables, una de ellas ya está determinada por la ubicación inicial (celda

gris); en la opción con el valor digitar cero (0) y finalmente en la opción *cambiando la celda* seleccionar la celda del pago del periodo 1, la cual estaba sin valores y, posteriormente, dar clic en *Aceptar.*

Excel realizará el proceso y calculará el valor de la cuota inicial, y ajustará la tabla para que los pagos cumplan con la condición del gradiente creciente y el saldo sea cero (0), es decir, finalización del préstamo en la tabla de amortización. Ver cómo hacerlo:

Tras dar clic en *Aceptar* la tabla de amortización quedará de la siguiente forma:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				15.000.000
1	150.006	806.028	956.034	14.193.972
2	141.945	884.089	1.026.034	13.309.884
3	133.104	962.930	1.096.034	12.346.954
4	123.474	1.042.559	1.166.034	11.304.394
5	113.048	1.122.985	1.236.034	10.181.409
6	101.818	1.204.216	1.306.034	8.977.193
7	89.775	1.286.258	1.376.034	7.690.935
8	76.912	1.369.121	1.446.034	6.321.814
9	63.220	1.452.813	1.516.034	4.869.001
10	48.692	1.537.342	1.586.034	3.331.659
11	33.318	1.622.716	1.656.034	1.708.943
12	17.090	1.708.943	1.726.034	0

Respuesta: El valor del crédito tomado equivale a **15.000.000.**

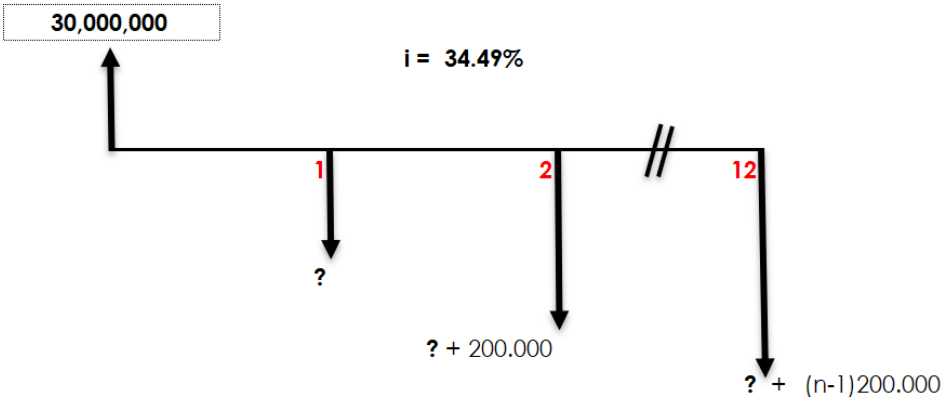
Ejemplo 3

Una persona posee una deuda de 30 millones de COP, la cual va a financiar en 12 cuotas, estas aumentan en 200.000 COP cada mes; si la tasa de interés es del 34,49% calcular el valor de la primera y de la última cuota.

$$ip = \left[1 + 0{,}3449\right]^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}025 \qquad n = 1 \text{ x } 12 = 12$$

ip = 0,025 n = 12 kp = mv G = 200.000 P = 30.000.000 C = ?

Gráfica 7-4. Valor primera cuota, gradiente lineal



Fx Fórmulas

$$\mathbf{P} = C\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n}\right]$$

Despejando C, quedaría:

$$\mathbf{C} = \frac{P - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n}\right]}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}$$

$$\mathbf{C} = \frac{30.000.000 - \frac{200.000}{0,025}\left[\frac{1-(1+0,025)^{-12}}{0,025} - 12\left(1+0,\ddot{0}\dot{2}5\right)^{-12}\right]}{\left[\frac{1-(1+0,025)^{-12}}{0,025}\right]}$$

$$C = 1.883.378$$

El valor de la última cuota será igual a 1.883.378 + 11 x 200.000 = 4.083.378

Respuesta: Teniendo en cuenta el valor del crédito, el tiempo, la tasa de interés y el gradiente creciente de 200.000 COP, el valor de la primera cuota sería igual a 1.883.378 y el valor de la última, es decir el pago 12, a **4.083.378.**

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Tabla 7-5. Valor primera cuota gradiente lineal creciente

Valor presente	30.000.000	30.000.000
Tiempo (años)	1	12
Tasa de interés (EA)	34,49%	0,025
Gradiente	200.000	200.000
Capitalización	Mensual	12
Valor primera cuota	?	?

Seguidamente, se construye una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Pago y Saldo.

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla: como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el doce (12). Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo, este será equivalente al valor del crédito o valor presente = P0.

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

- Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa con F4.
- Amortización = Pago del periodo 1 menos los intereses del periodo 1.
- Pago = Dejarla en blanco por el momento.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2):

- Intereses = Saldo anterior mu ltiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa.
- Amortización = Pago del periodo 2 menos los intereses del periodo 2.
- Pago = Pago del periodo 1 más el valor del gradiente y fijar el gradiente.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 menos la amortización del periodo 2.

Luego de seleccionar desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y arrastrar hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				$= P_0$
1	$= P_0$ x ip	$= C_1 - Int_1$		$= P_0$ - $Amort_1$
2	$= P_1$ x ip	$= C_2 - Int_2$	$=C_1 + G$	$= P_1$ - $Amort_2$

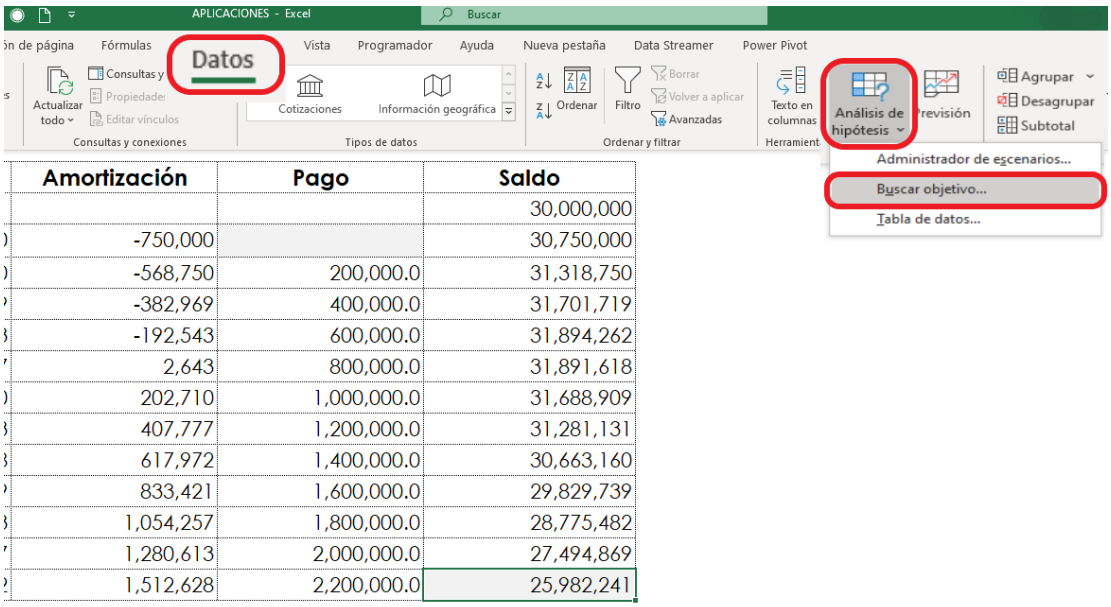
El resultado será el siguiente:

Tabla 7-6. Amortización cálculo primera cuota valor presente gradiente lineal creciente

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				30,000,000
1	750.000	-750.000		30.750.000
2	768.750	-568.750	200.000	31.318.750
3	782.969	-382.969	400.000	31.701.719
4	792.543	-192.543	600.000	31.894.262
5	797.357	2.643	800.000	31.891.618
6	797.290	202.710	1.000.000	31.688.909
7	792.223	407.777	1.200.000	31.281.131
8	782.028	617.972	1.400.000	30.663.160
9	766.579	833.421	1.600.000	29.829.739
10	745.743	1.054.257	1.800.000	28.775.482
11	719.387	1.280.613	2.000.000	27.494.869
12	687.372	1.512.628	2.200.000	25.982.241

Luego de este proceso, ubicarse en la celda gris, es decir, en el saldo del periodo 12, una vez ahí ir a la pestaña *Datos*, seleccionar la pestaña Análisis de hipótesis y ahí la opción *Buscar objetivo...* ver cómo hacerlo:

Imagen 52. Datos, Análisis de Hipótesis – Buscar Objetivo

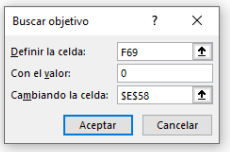


Amortización	Pago	Saldo
		30,000,000
-750,000		30,750,000
-568,750	200,000.0	31,318,750
-382,969	400,000.0	31,701,719
-192,543	600,000.0	31,894,262
2,643	800,000.0	31,891,618
202,710	1,000,000.0	31,688,909
407,777	1,200,000.0	31,281,131
617,972	1,400,000.0	30,663,160
833,421	1,600,000.0	29,829,739
1,054,257	1,800,000.0	28,775,482
1,280,613	2,000,000.0	27,494,869
1,512,628	2,200,000.0	25,982,241

Luego dar clic en *Buscar objetivo...* y aparecerá una ventana con tres (3) variables, una de ellas ya está determinada por la ubicación inicial (celda gris); en la opción con el valor digitar cero (0) y finalmente en la opción cambiando la celda seleccionar la celda del pago del periodo 1, la cual estaba sin valores y dar clic en *Aceptar*.

Excel hará el proceso, calculará el valor de la cuota inicial y ajustará la tabla para que los pagos cumplan la condición del gradiente creciente y el saldo sea cero (0), es decir, la finalización del préstamo en la tabla de amortización. Ver resultado:

Pago	Saldo
	30,000,000
	30,750,000
200,000.0	31,318,750
400,000.0	31,701,719
600,000.0	31,894,262
800,000.0	31,891,618
1,000,000.0	31,688,909
1,200,000.0	31,281,131
1,400,000.0	30,663,160
1,600,000.0	29,829,739
1,800,000.0	28,775,482
2,000,000.0	27,494,869
2,200,000.0	25,982,241



Luego de dar clic en Aceptar la tabla de amortización quedará de la siguiente forma:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				30.000.000
1	750.000	1.133.378	1.883.378	28.866.622
2	721.666	1.361.712	2.083.378	27.504.910
3	687.623	1.595.755	2.283.378	25.909.154
4	647.729	1.835.649	2.483.378	24.073.505
5	601.838	2.081.540	2.683.378	21.991.965
6	549.799	2.333.579	2.883.378	19.658.386
7	491.460	2.591.918	3.083.378	17.066.468
8	426.662	2.856.716	3.283.378	14.209.751
9	355.244	3.128.134	3.483.378	11.081.617
10	277.040	3.406.338	3.683.378	7.675.279
11	191.882	3.691.496	3.883.378	3.983.783
12	99.595	3.983.783	4.083.378	0

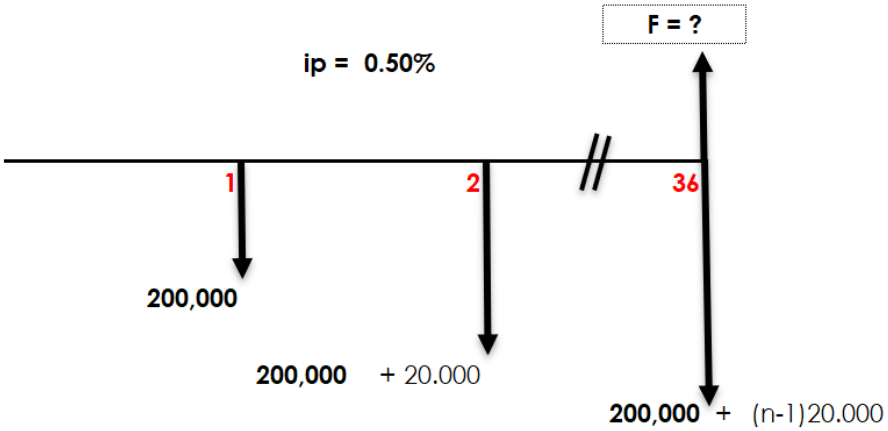
Respuesta: El valor de la primera cuota equivale a **1.883.378.**

Ejemplo 4

Una persona inicia ahorrando 200.000 COP cada mes en una entidad financiera que paga el 0,5%mes vencido, este se propone aumentar periódicamente en 20.000 COP el valor de sus depósitos. Al final de tres años, ¿cuál será el valor de sus ahorros?

ip = 0,005 n = 36 kp = mv G = 20.000 C = 200.000 F = ?

Gráfica 7-5. Valor futuro de un gradiente lineal



Fx Fórmulas

$$\mathbf{F = C\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i} - n\right]}$$

$$\mathbf{F} = 200.000\left[\frac{(1+0,005)^{36}-1}{0,005}\right] + \frac{20.000}{0,005}\left[\frac{(1+0,005)^{36}-1}{0,005} - 36\right]$$

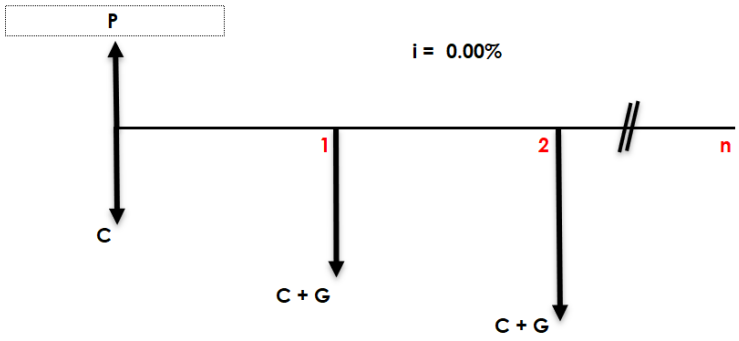
$$F = 21.211.641$$

Respuesta: El valor de sus ahorros al final de los tres años equivale a 21.211.641 COP.

Fx Fórmulas

Valor presente gradiente lineal creciente anticipado

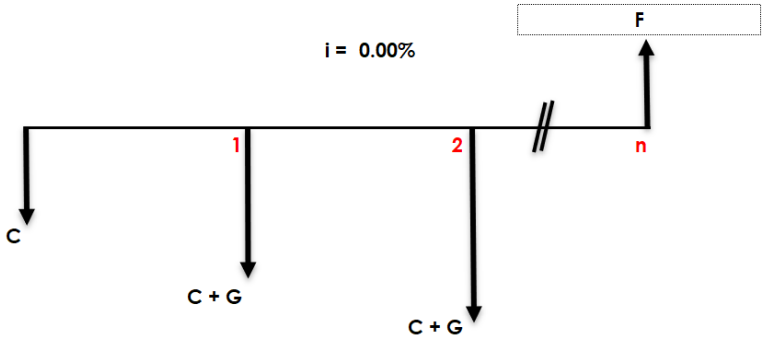
$$\mathbf{P} = \left\{ \mathbf{C}\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathrm{i}} \right] + \frac{\mathbf{G}}{\mathrm{i}}\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathrm{i}} - \mathbf{n}(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}} \right] \right\}(1+\mathbf{i})$$



Fx Fórmulas

Valor futuro gradiente lineal creciente anticipado

$$\mathbf{F} = \left\{ \mathbf{C}\left[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}}-1}{\mathrm{i}} \right] + \frac{\mathbf{G}}{\mathrm{i}}\left[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}}-1}{\mathrm{i}} - \mathbf{n} \right] \right\}(1+\mathbf{i})$$



7.4 GRADIENTE LINEAL (Decreciente)

Este tipo de gradientes tienen la característica de ir disminuyendo en un valor constante del pago periodo a periodo.

Ver algunos casos:

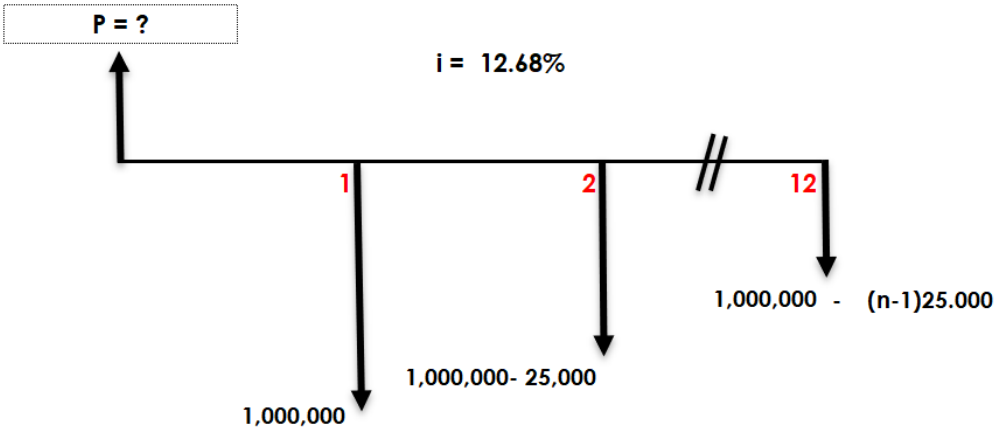
Ejemplo 5

Una persona inicia el pago de su motocicleta, la cual ha financiado a un año con cuotas mensuales que tienen el siguiente comportamiento: la primera cuota corresponde a 1.000.000 COP y cada mes disminuye en 25.000 COP; si la tasa de interés es del 1%mv, por lo anterior, determine:

¿Cuál será el valor del crédito otorgado?

ip = 0,01 n = 12 kp = mv G = 25.000 C = 1.000.000 P = ?

Gráfica 7-6. Valor presente de un gradiente lineal decreciente



Fx Fórmulas

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\left[\frac{\text{üüüü}(\text{ü}+\ )^{-\mathbf{n}}}{\mathbf{i}}\right] - \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{i}}\left[\frac{-(\ +\ )^{-\mathbf{n}}}{\mathbf{i}} - \mathbf{n}(1+\mathbf{i})^{-\mathbf{n}}\right]$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\left[\frac{\text{üüüü}(\text{ü}+\ )^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right] - \frac{\mathbf{G}}{\mathrm{i}}\left[\frac{-(\ +\ )^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}} - \mathrm{n}(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}\right]$$

$$\mathbf{P} = 1.000.000\left[\frac{1-(1+0{,}01)^{-12}}{0{,}01}\right] - \frac{25.000}{0{,}01}\left[\frac{1-(1+0{,}01)^{-12}}{0{,}01} - 12(1+0{,}01)^{-12}\right]$$

$$\mathrm{P} = 9.740.861$$

Respuesta: El valor del crédito tomado para pagar la motocicleta fue de 9.740.861 COP.

En Excel quedaría de la siguiente manera: .Xls

Tabla 7-8. Valor presente de un gradiente lineal decreciente

Valor presente	?	?
Tiempo (años)	1	12
Tasa de interés (EA)	12,68 %	0,0100
Gradiente	25.000	25.000
Capitalización	Mensual	12
Valor primera cuota	1.000.000	1.000.000

.Xls *Seguidamente, se debe construir una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Pago y Saldo.*

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla: como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el doce (12). Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo si es desconocido, se deja en cero (0).

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

- Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa con F4.
- Amortización = Pago del periodo 1 menos los intereses del periodo 1.
- Pago = El valor de la primera cuota.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2):

- Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa.
- Amortización = Pago del periodo 2 menos los intereses del periodo 2.
- Pago = Pago del periodo 1 más el valor del gradiente y fijar el gradiente.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 2.

Luego se selecciona desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y arrastrar hasta el periodo 12. Lo anterior quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				$= P_0$
1	$= P_0 \times i\$p\$$	$= C_1 - Int_1$		$= P_0 - Amort_1$
2	$= P_1 \times i\$p\$$	$= C_2 - Int_2$	$=C_1 + G$	$= P_1 - Amort_2$

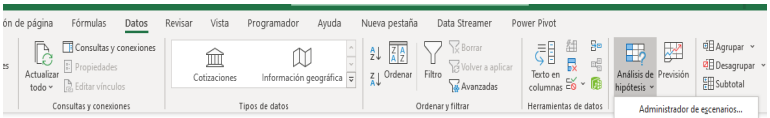
El resultado será el siguiente:

Tabla 7-9. Amortización valor presente gradiente lineal creciente

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				0
1	0	1.000.000	1.000.000	-1.000.000
2	-10.000	985.000	975.000	-1.985.000
3	-19.850	969.850	950.000	-2.954.850
4	-29.549	954.549	925.000	-3.909.399
5	-39.094	939.094	900.000	-4.848.492
6	-48.485	923.485	875.000	-5.771.977
7	-57.720	907.720	850.000	-6.679.697
8	-66.797	891.797	825.000	-7.571.494
9	-75.715	875.715	800.000	-8.447.209
10	-84.472	859.472	775.000	-9.306.681
11	-93.067	843.067	750.000	-10.149.748
12	-101.497	826.497	725.000	-10.976.245

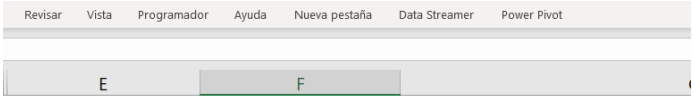
Luego de este proceso ubicarse en la celda gris, es decir, en el saldo del periodo 12, una vez ahí ir a la pestaña Datos, seleccionar la pestaña *Análisis de hipótesis* y ahí la opción *Buscar objetivo...*, ver cómo es esto:

Imagen 53. Datos, Análisis de Hipótesis – Buscar Objetivo

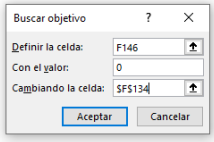


Abono	Cuota	Saldo
		0
1,000,000	1,000,000	-1,000,000
985,000	975,000	-1,985,000
969,850	950,000	-2,954,850
954,549	925,000	-3,909,399
939,094	900,000	-4,848,492
923,485	875,000	-5,771,977
907,720	850,000	-6,679,697
891,797	825,000	-7,571,494
875,715	800,000	-8,447,209
859,472	775,000	-9,306,681
843,067	750,000	-10,149,748
826,497	725,000	-10,976,245

Después dar clic en *Buscar objetivo...* y aparecerá una ventana con tres (3) variables, una de ellas ya está determinada por la ubicación inicial (celda gris), en la opción con el valor digitar cero (0) y finalmente en la opción cambiando la celda seleccionar la celda del saldo del periodo 0, la cual estaba sin valores y dar clic en *Aceptar*. Excel el realizará proceso y calculará el valor inicial o presente, y ajustará la tabla para que los pagos cumplan con la condición del gradiente creciente y el saldo sea cero (0), es decir, finalización del préstamo en la tabla de amortización. Ver cómo hacerlo:



Cuota	Saldo
	0
1,000,000	-1,000,000
975,000	-1,985,000
950,000	-2,954,850
925,000	-3,909,399
900,000	-4,848,492
875,000	-5,771,977
850,000	-6,679,697
825,000	-7,571,494
800,000	-8,447,209
775,000	-9,306,681
750,000	-10,149,748
725,000	-10,976,245



Luego de dar clic en Aceptar la tabla de amortización quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				9.740.861
1	97.409	902.591	1.000.000	8.838.269
2	88.383	886.617	975.000	7.951.652
3	79.517	870.483	950.000	7.081.168
4	70.812	854.188	925.000	6.226.980
5	62.270	837.730	900.000	5.389.250
6	53.892	821.108	875.000	4.568.142
7	45.681	804.319	850.000	3.763.824
8	37.638	787.362	825.000	2.976.462
9	29.765	770.235	800.000	2.206.227
10	22.062	752.938	775.000	1.453.289
11	14.533	735.467	750.000	717.822
12	7.178	717.822	725.000	0

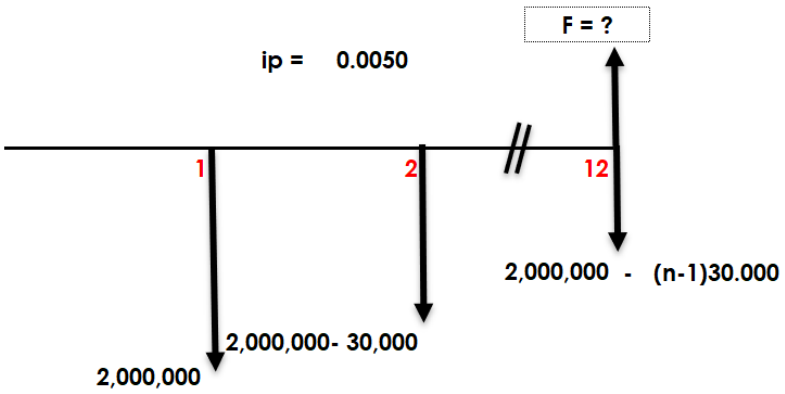
Respuesta: El valor del préstamo equivale a **9.740.861.**

Ejemplo 6

Una persona inicia ahorrando durante un año en una entidad financiera que paga el 0,5%mensual, la primera cuota correspondió a 2.000.000 COP y por ciertas dificultades cada mes empezó a disminuir en 30.000 COP sus depósitos de manera constante; si al final del año paga su cuenta, ¿cuál será el valor de sus ahorros?

$ip = 0{,}005$ $n = 12$ $kp = mv$ $G = 30.000$ $C = 2.000.000$ $F = ?$

Gráfica 7-7. Valor futuro de un gradiente lineal decreciente



Fx Fórmulas

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}\left[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}}-1}{\mathrm{i}}\right] - \frac{\mathbf{G}}{\mathrm{i}}\left[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}}-1}{\mathrm{i}} - \mathbf{n}\right]$$

$$\mathbf{F} = 2.000.000\left[\frac{(1+0,005)^{12}-1}{0,005}\right] - \frac{30.000}{0,005}\left[\frac{(1+0,005)^{12}-1}{0,005} - 12\right]$$

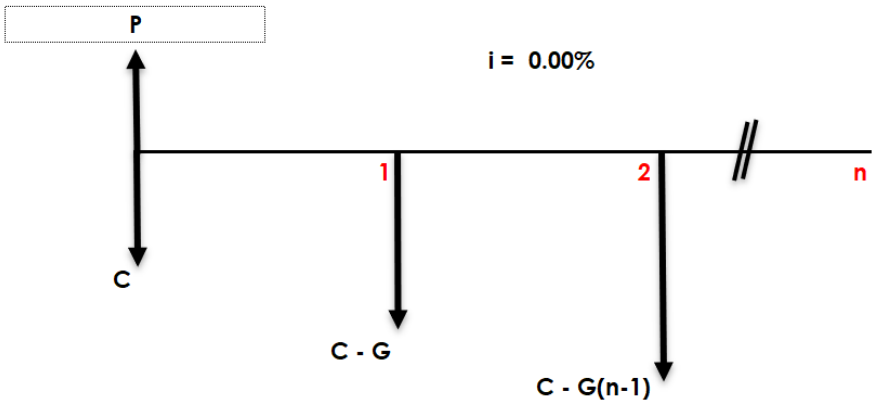
$$F = 22.657.751$$

Respuesta: El ahorro al final del año tras ahorrar 30.000 COP menos, a partir de la cuota de 2.000.000 es de 22.657.751.

Fx Fórmulas

Valor presente gradiente lineal decreciente anticipado

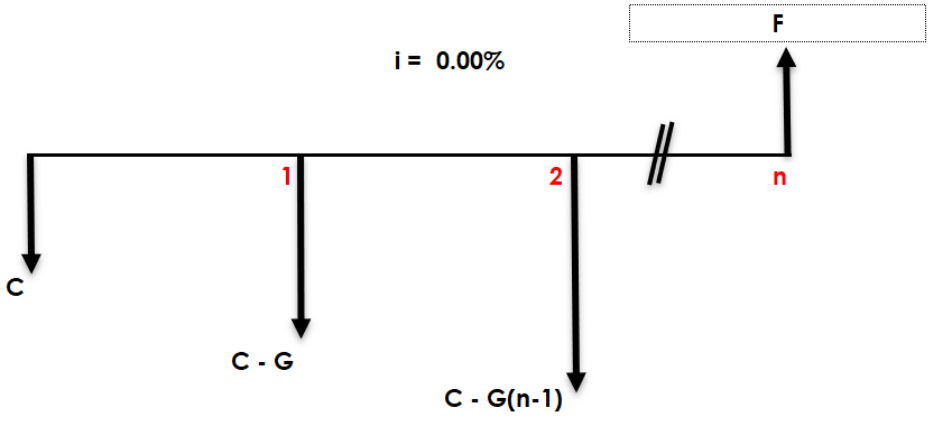
$$\mathbf{P} = \left\{\mathbf{c}\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathrm{i}}\right] - \frac{\mathbf{G}}{\mathrm{i}}\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathrm{i}} - \mathbf{n}(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}\right]\right\}(1+\mathbf{i})$$



Fx Fórmulas

Valor futuro gradiente lineal decreciente anticipado

$$\mathbf{F} = \left\{ \mathbf{c}\left[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}} - 1}{\mathrm{i}} \right] - \frac{\mathbf{G}}{\mathrm{i}}\left[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}} - 1}{\mathrm{i}} - \mathbf{n} \right] \right\}(1+\mathbf{i})$$



7.5 GRADIENTE GEOMÉTRICO (Creciente)

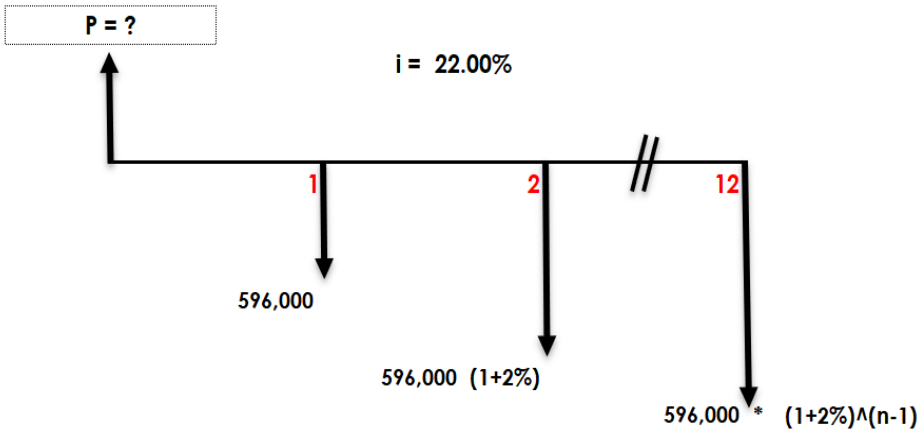
El gradiente geométrico tiene las mismas condiciones del gradiente lineal o aritmético, es decir, existe una constante de incremento o disminución desde la primera cuota; la diferencia está en el valor del patrón o constante de variación, mientras que el lineal aumenta o disminuye una cantidad absoluta, en el gradiente geométrico es un valor relativo o porcentual. Estos también pueden ser vencidos o anticipados, además, es posible calcular su valor presente o futuro. Ver algunos ejemplos:

Ejemplo 7

Jorge Mario obtuvo del banco un préstamo para ser pagado en un año, en el cual el valor de la primera cuota fue de 596.000 y el valor de esta se incrementaba cada mes en un 2% si la tasa de interés cobrada por la entidad correspondía al 22%EA, ¿cuál fue el valor del préstamo otorgado a Jorge Mario?

ip =0,0167 n = 12 kp = mv G = 2% C = 596.000 P = ?

Gráfica 7-8. Valor presente de un gradiente geométrico creciente vencido



Fx Fórmulas

$$P = C\left[\frac{\left(\frac{(1+G)}{(1+i)}\right)^{n}-1}{G-i}\right]$$

$$P = 596.000\left[\frac{\left(\frac{(1+0,02)}{(1+0,0167)}\right)^{12}-1}{0,02-0,0167}\right]$$

$$P = 7.161.059$$

Respuesta: El valor del préstamo otorgado a Jorge Mario correspondió a 7.161.059.

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Tabla 7-10. Valor presente gradiente geométrico creciente vencido

Valor presente	?	?
Tiempo (años)	1	12
Tasa de interés (EA)	22 %	0,0167
Gradiente	2 %	0,02
Capitalización	Mensual	12
Valor primera cuota	596.000	596.000

Seguidamente, se construye una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Pago y Saldo.

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla: como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el doce (12). Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo, este será equivalente al valor del crédito o valor presente = P0.

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

- Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa con F4.
- Amortización = Pago del periodo 1 menos los intereses del periodo 1.
- Pago = Dejarla en blanco por el momento.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2):

- Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa.
- Amortización = Pago del periodo 2 menos los intereses del periodo 2.
- Pago = Pago del periodo 1 más valor del gradiente y fijar el gradiente.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 menos la amortización del periodo 2.

Luego se selecciona desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y arrastrar hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				$= P_0$
1	$= P_0 \times i\$p\$$	$= C_1 - Int_1$		$= P_0 - Amort_1$
2	$= P_1 \times i\$p\$$	$= C_2 - Int_2$	$=C_1*(1+G\$)$	$= P_1 - Amort_2$

El resultado será el siguiente:

Tabla 7-11. Amortización cálculo valor presente gradiente geométrico creciente vencido

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				7.161.059
1	119.654	476.346	596.000	6.684.713
2	111.695	496.225	607.920	6.188.487
3	103.403	516.675	620.078,4	5.671.812
4	94.770	537.710	632.480	5.134.102
5	85.786	559.344	645.129,6	4.574.758
6	76.439	581.593	658.032,2	3.993.165
7	66.722	604.471	671.192,8	3.388.694
8	56.622	627.995	684.616,7	2.760.699
9	46.128	652.181	698.309	2.108.519
10	35.231	677.044	712.275,2	1.431.475
11	23.918	702.602	726.520,7	728.872
12	12.179	728.872	741.051,1	0

En caso de establecer o determinar el valor de una cuota en particular, la fórmula será la siguiente:

Fx Fórmulas

$$\mathbf{C_n = C(1+G)^{n-1}}$$

En caso de desear conocer el valor de la cuota del periodo 5 de la tabla anterior, el resultado sería así:

$$C_5 = 596.000\,(1+0,02)^{5-1}$$

$$C_5 = 596.000\,(1+0,02)^{4}$$

$$C_5 = 645.129,60$$

Fx Fórmulas

Valor futuro gradiente geométrico vencido

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{C}\left[1-\left(\frac{1+\mathbf{G}}{1+\mathbf{i}}\right)^{\mathbf{n}}\right]}{(\mathbf{i}-\mathbf{G})}(1+\mathbf{i})^{\mathbf{n}}$$

Ejemplo 8

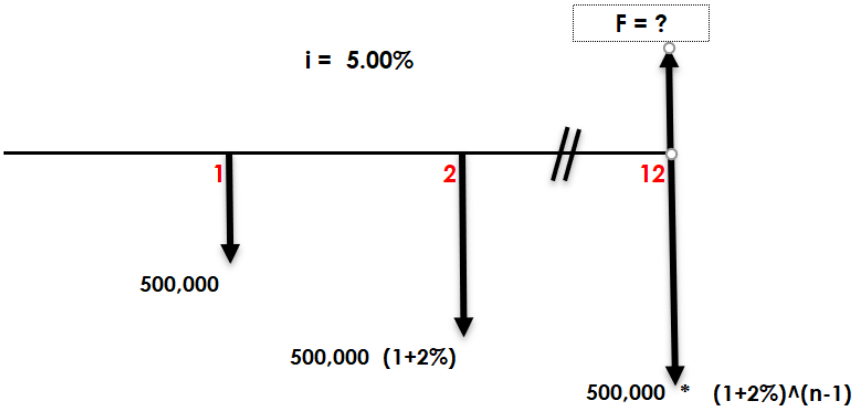
Samuel, un joven ahorrador, inició depósitos en una entidad que pagaba el 5%EA, el valor de la primera cuota depositada fue de 500.000 y, debido a algunas circunstancias, pudo empezar a elevar el valor de su ahorro incrementando cada mes en un 2% Si esto lo hizo periódicamente durante un año, ¿cuál fue el valor de los ahorros de Samuel en el periodo 12?

Solución:

$$ip = [1 + 0{,}05]^{\frac{1}{12}} - 1 \quad = 0.0041 \qquad n = \ 1 \text{ x } 12 = 12$$

ip =0,0041 n = 12 kp = mv G = 2% C = 500.000 P = ?

Gráfica 7-9. Valor futuro de un gradiente geométrico creciente vencido



Fx Fórmulas

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{C}\left[1 - \left(\frac{1+\mathbf{G}}{1+\mathrm{i}}\right)^{\mathbf{n}}\right]}{(\mathrm{i} - \mathbf{G})}(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}}$$

$$= \frac{500.000\left[1 - \left(\frac{1+0{,}02}{1+0{,}0041}\right)^{12}\right]}{(0{,}0041 - 0{,}02)}(1+0{,}0041)^{12}$$

F = 6.851.799

Respuesta: El valor de los ahorros de Samuel será equivalente a **6.851.799.**

.Xls *En Excel quedaría de la siguiente manera:*

Tabla 7-12. Valor futuro de un gradiente geométrico creciente vencido

Valor futuro	?	?
Tiempo (años)	1	12
Tasa de interés (EA)	5 %	0,0041
Gradiente	2 %	2 %
Capitalización	Mensual	12
Valor primera cuota	500.000	500.000

Seguidamente se construye una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Pago y Saldo.

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla. Como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el 12. Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo, este será equivalente a cero (0).

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

En este caso es importante recordar que los intereses son compuestos y cada depósito debe llevarse a valor futuro en diferentes momentos, de esta manera, recordaremos cómo calcular los intereses con base en el valor futuro.

Teniendo como premisa que:

Fx Fórmulas

$$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}} \text{ y que INT = VF – VP, entonces: } \mathbf{INT} = \mathbf{VP}(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}} - \mathbf{VP}$$

Factorizando se tendrá:

$$\mathbf{INT} = \mathbf{VP}\left[(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}} - 1\right]$$

- Intereses = En esta celda aplicar la fórmula planteada, en la cual el valor presente será el depósito del periodo 1 y n será once (11), ya que los intereses del primer pago tendrán 11 meses de intereses.
- Amortización = Depósito del periodo 1 más los intereses del periodo 1.
- Depósito = Será igual al primer depósito.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 más la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2).

- Intereses = En esta celda aplicar la nuevamente fórmula planteada, en la cual el valor presente será el depósito del segundo periodo y n será diez (10); ya que los intereses del primer pago tendrán 10 meses de intereses, para los demás periodos estos irán disminuyendo el tiempo en 1, de esa manera en el periodo 12 los intereses serán cero (0).
- Amortización = Depósito del periodo 2 más los intereses del periodo 2.
- Depósito = Depósito del periodo 1 más valor del gradiente y fijar el gradiente.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 más la amortización del periodo 2.

Luego seleccionar desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y arrastrar hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Depósito	Saldo
0				
1	= D_1((1+ ip)^11	= D_1 + Int_1	C	= SA + $Amort_1$
2	= D_2((1+ ip)^10	= D_2 + Int_2	=D_1*(1+G$)	= SA + $Amort_2$

El resultado será el siguiente:

Tabla 7-13. Amortización cálculo valor presente gradiente geométrico creciente vencido

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				
1	22.870	522.870	500.000	522.870
2	21.163	531.163	510.000	1.054.033
3	19.388	539.588	520.200	1.593.621
4	17.543	548.147	530.604	2.141.768
5	15.625	556.841	541.216,1	2.698.608
6	13.633	565.673	552.040,4	3.264.282
7	11.564	574.645	563.081,2	3.838.927
8	9.417	583.760	574.342,8	4.422.687
9	7.189	593.019	585.829,7	5.015.706
10	4.879	602.425	597.546,3	5.618.131
11	2.483	611.980	609.497,2	6.230.112
12	0	621.687	621.687,2	6.851.799

7.6 GRADIENTE GEOMÉTRICO (Decreciente)

Ejemplo 9

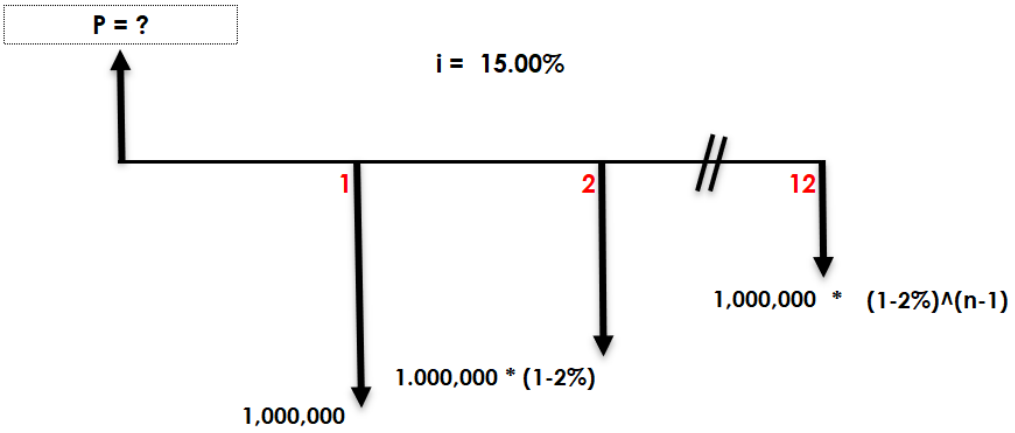
Diego TR, un joven emprendedor, tomó un empréstito para subsanar ciertas vicisitudes en su labor, la entidad donde financió el dinero cobraba intereses a razón del 15%EA, el primer pago lo efectuó por valor de 1.000.000; según acuerdo con la entidad, este tendría una cuota variable decreciente, la cual disminuiría en un 2,5%cada mes. Si el crédito lo tomó para ser pagado en un año, ¿cuál fue el valor del préstamo asignado a Diego?

Solución:

$$ip = [1+0{,}15]^{\frac{1}{12}} - 1 \quad = 0.0117 \qquad n = 1 \text{ x } 12 = 12$$

ip = 0,0117 n = 12 kp = mv G = 2,5% C = 1.000.000 P = ?

Gráfica 7-10. Valor presente de un gradiente geométrico decreciente vencido



Fx Fórmulas

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\left[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}} - (1-\mathbf{G})}{(\mathbf{G}+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}}}\right]$$

$$\mathbf{P} = 1.000.000\left[\frac{(1+0{,}0117)^{12} - (1-0{,}025)^{12}}{(0{,}025+0{,}0117)(1+0{,}0117)^{12}}\right]$$

$$\mathbf{P} = 9.757.950$$

Respuesta: El valor del préstamo asignado a Diego fue de **9.757.950.**

.Xls *En Excel quedaría de la siguiente manera:*

Luego se construye una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Depósito y Saldo.

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla: como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el doce (12). Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo, si es desconocido se deja en cero (0).

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

- Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa con F4.
- Amortización = Pago del periodo 1 menos los intereses del periodo 1.

- Depósito = El valor de la primera cuota.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2):

- Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa.
- Amortización = Pago del periodo 2 menos los intereses del periodo 2.
- Depósito = Pago del periodo 1 más el valor del gradiente y fijar el gradiente.
- Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 menos la amortización del periodo 2.

Luego seleccionar desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y arrastrar hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Depósito	Saldo
0				0
1	$= P_0 \times i\$p\$$	$= C_1 - Int_1$		$= P_0 - Amort_1$
2	$= P_1 \times i\$p\$$	$= C_2 - Int_2$	$=C + \$G$	$= P_1 - Amort_2$

El resultado será el siguiente:

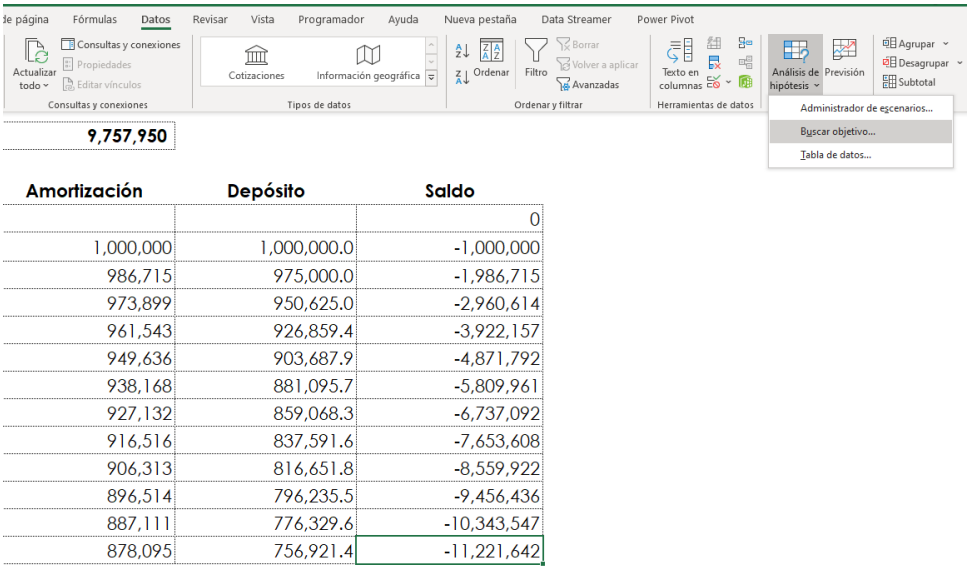
Tabla 7-14. Amortización cálculo valor presente de un gradiente geométrico decreciente vencido

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				0
1	0	1.000.000	1.000.000	-1.000.000
2	-11.715	986.715	975.000	-1.986.715

3	-23.274	973.899	950.625	-2.960.614
4	-34.683	961.543	926.859,4	-3.922.157
5	-45.948	949.636	903.687,9	-4.871.792
6	-57.073	938.168	881.095,7	-5.809.961
7	-68.063	927.132	859.068,3	-6.737.092
8	-78.924	916.516	837.591,6	-7.653.608
9	-89.661	906.313	816.651,8	-8.559.922
10	-100.279	896.514	796.235,5	-9.456.436
11	-110.781	887.111	776.329,6	-10.343.547
12	-121.174	878.095	756.921,4	-11.221.642

Luego de este proceso ubicarse en la celda gris, es decir, en el saldo del periodo 12, una vez ahí ir a la pestaña Datos, seleccionar la pestaña Análisis de hipótesis y después la opción *Buscar objetivo…*, ver el resultado:

Imagen 54. Datos, Análisis de Hipótesis – Buscar Objetivo

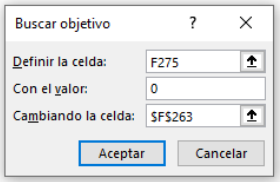


Amortización	Depósito	Saldo
		0
1,000,000	1,000,000.0	-1,000,000
986,715	975,000.0	-1,986,715
973,899	950,625.0	-2,960,614
961,543	926,859.4	-3,922,157
949,636	903,687.9	-4,871,792
938,168	881,095.7	-5,809,961
927,132	859,068.3	-6,737,092
916,516	837,591.6	-7,653,608
906,313	816,651.8	-8,559,922
896,514	796,235.5	-9,456,436
887,111	776,329.6	-10,343,547
878,095	756,921.4	-11,221,642

Luego dar clic en Buscar objetivo... y aparecerá una ventana con tres (3) variables, una de ellas ya está determinada por la ubicación inicial (celda gris), en la opción con el valor digitar cero (0) y finalmente en la opción cambiando la celda seleccionar la celda del saldo del periodo 0, la cual estaba sin valores y dar clic en *Aceptar*.

Excel realizará proceso y calculará el valor inicial o presente, y ajustará la tabla para que los pagos cumplan con la condición del gradiente creciente y el saldo sea cero (0), es decir, la finalización del préstamo en la tabla de amortización. Ver cómo hacerlo:

Depósito	Saldo
	0
1,000,000.0	-1,000,000
975,000.0	-1,986,715
950,625.0	-2,960,614
926,859.4	-3,922,157
903,687.9	-4,871,792
881,095.7	-5,809,961
859,068.3	-6,737,092
837,591.6	-7,653,608
816,651.8	-8,559,922
796,235.5	-9,456,436
776,329.6	-10,343,547
756,921.4	-11,221,642



Tras dar clic en *Aceptar* la tabla de amortización quedará de la siguiente forma:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				9.757.950
1	114.314	885.686	1.000.000	8.872.263

2	103.938	871.062	975.000	8.001.201
3	93.733	856.892	950.625	7.144.309
4	83.695	843.164	926.859,4	6.301.145
5	73.817	829.871	903.687,9	5.471.274
6	64.096	817.000	881.095,7	4.654.274
7	54.524	804.544	859.068,3	3.849.730
8	45.099	792.492	837.591,6	3.057.238
9	35.815	780.837	816.651,8	2.276.402
10	26.668	769.568	796.235,5	1.506.834
11	17.652	758.677	776.329,6	748.157
12	8.765	748.157	756.921,4	0

Respuesta: El valor del préstamo equivale a **9.757.950.**

Fx Fórmulas

Gradientes geométricos anticipados

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\left[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}} - (1-\mathbf{G})}{(\mathbf{G}+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^{\mathbf{n}}}\right](1+\mathbf{i})$$

$$\mathbf{F} = \left\{\frac{\mathbf{C}\left[1-\left(\frac{1+\mathbf{G}}{1+\mathrm{i}}\right)^{\mathbf{n}}\right]}{(\mathrm{i}-\mathbf{G})}(1+\mathrm{i})\right\}(1+\mathrm{i})$$

PROBLEMAS

1. Una persona tomó un crédito de 20.000.000 para ser pagado en un año, la tasa de interés que la entidad cobraba era del 12,68% mensual y a partir de la primera cuota realizó un incremento de 70.000 hasta el último pago; si la capitalización es mes vencido, ¿cuál es valor de la primera cuota?

   Respuesta: 1.400.251.

2. Una persona posee una deuda en COP, la cual va a financiar en 12 cuotas, las cuales aumentan en un 2%cada mes; si la tasa de interés es del 20%y el valor de la primera cuota es de un millón de COP, ¿cuál es valor del crédito?

   Respuesta: 12.124.039.

3. Una persona posee una deuda en COP, la cual va a financiar en 12 cuotas, las cuales aumentan en 60.000 COP cada mes; si la tasa de interés es del 25%y el valor de la primera cuota es de 500.000 COP, ¿cuál es valor del crédito?

   Respuesta: 8.702.690.

4. Una persona inicia ahorrando 200.000 COP cada mes en una entidad financiera que paga el 0,6%mes vencido, este se propone aumentar periódicamente en 25.000 COP el valor de sus depósitos. Al final de tres años, ¿cuál será el valor de sus ahorros?

   Respuesta: 24.886.169.

5. Una persona inicia ahorrando 600.000 COP cada mes en una entidad financiera que paga el 0,4%mes vencido, este se propone aumentar periódicamente en 10.000 COP el valor de sus depósitos. Al final del año, ¿cuál será el valor de sus ahorros?

   Respuesta: 8.029.411.

8. Sistemas de amortización

"Se definen como el comportamiento que tiene una inversión o financiación, la cual contiene los intereses causados, disminución o aumento del capital periodo tras periodo"

8.1 DEFINICIÓN

La amortización es la forma mediante la cual se paga una obligación, mediante pagos vencidos o anticipados, hasta que el saldo de esta llegue a cero (0). (Vargas, 2015)

8.2 SISTEMA DE AMORTIZACIÓN

Es la descripción cuantitativa de cómo eliminar una acreencia o deuda, esta debe tener como primera instancia el valor adeudado y definir un plazo de tiempo en el cual se acuerda realizar una serie de pagos, los cuales son producto de establecer un costo de capital denominado tasa de interés; además, una periodicidad o lapso para efectuarlos, que pueden ser al inicio de los periodos o al final de ellos, lo que se conoce como vencimiento. (Vargas, 2015)

Teniendo en cuenta lo anterior, se establece que los elementos para determinar un sistema de amortización son: valor del capital o préstamos, plazo, tasa de interés, cuota y tipo, es decir, anticipada o vencida. Las anteriores variables tienden a cambiar de acuerdo con diferentes acuerdos en el contrato mutuo.

Ahora se caracterizarán algunos de los más conocidos en el sistema financiero:

8.3 ÚNICO PAGO AL FINAL DEL PLAZO

Esta forma de amortización es muy utilizada en la compra y venta de bonos o títulos de tesorería del banco central, consiste en pagar los intereses durante el plazo y en el último periodo pagar el capital o principal.

Ver caso del sistema en estudio:

Ejemplo 1

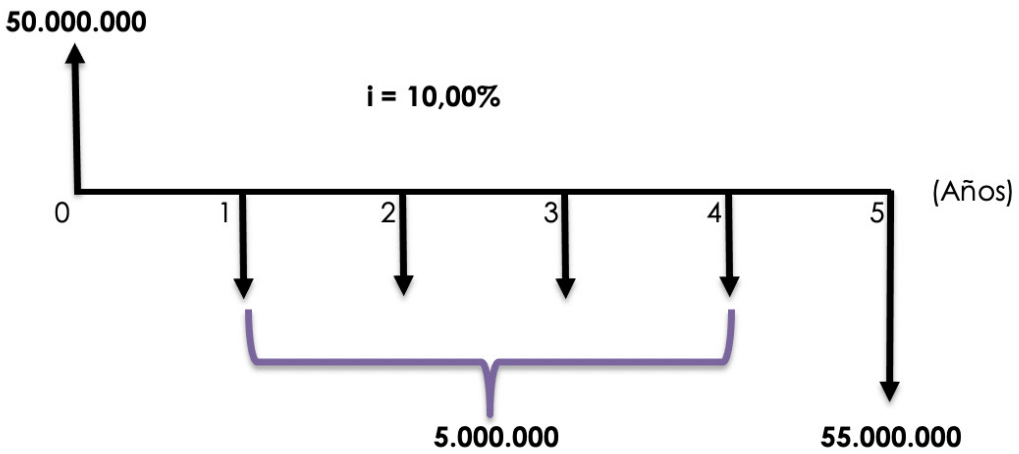
Un título es vendido por un valor de 50.000.000 que paga rendimientos anuales a razón del 10%durante 5 años y en el quinto periodo se pagará el título. Determinar la amortización de la inversión.

Solución:

Los intereses son el producto del valor del título por la tasa. $I = P \times i$

$P = 50.000.000 \qquad n = 5 \qquad i = 0,10 \qquad I = 50.000.000 \times 0,10$

Gráfica 8-1. Sistema de amortización pago único al final del plazo



La tabla de amortización se estima de la siguiente forma:

Tabla 8-1. Amortización pago al final del periodo

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0				P
1		P x i	A + I	S - A
2		P x i	A + I	S - A
5	P	P x i	A + I	S - A

Finalmente, se tendrá la tabla o esquema, la cual refleja el pago de rendimientos al final del tiempo, y en el último periodo, la cancelación del título.

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0	0	0	0	50.000.000
1	0	5.000.000	5.000.000	50.000.000
2	0	5.000.000	5.000.000	50.000.000
3	0	5.000.000	5.000.000	50.000.000
4	0	5.000.000	5.000.000	50.000.000
5	50.000.000	5.000.000	55.000.000	0

Ejemplo 2

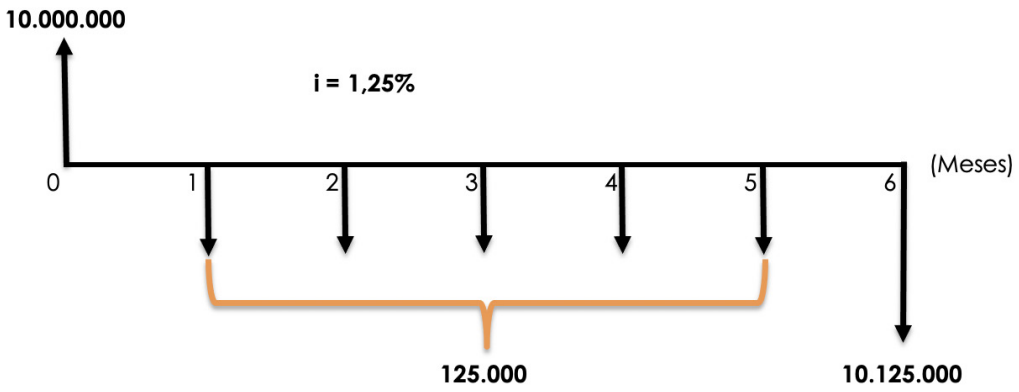
Alejandro obtiene un crédito por valor de 10.000.000, el cual se va a financiar a 6 meses a razón del 1,25%mv, los pagos efectuados mensualmente serán únicamente de intereses y el valor del crédito será pagado al final del tiempo acordado. ¿Cómo quedaría la tabla de amortización para la deuda de Alejandro?

Solución:

Los intereses son el producto del valor del título por la tasa. $I = P \times i$

$P = 10.000.000$ $n = 6$ $i = 0{,}0125$ $I = 10.000.000 \times 0{,}0125$

Gráfica 8-2. Sistema de amortización pago único al final del plazo



La tabla de amortización se calcula de la siguiente forma:

Tabla 8-2 .Amortización pago al final del periodo

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0				P
1		P x i	A + I	S - A
2		P x i	A + I	S - A
6	P	P x i	A + I	S - A

Finalmente, se tendrá la tabla o esquema, la cual refleja el pago de rendimientos al final del tiempo, y en el último periodo, la cancelación del título.

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0	0	0	0	10.000.000
1	0	125.000	125.000	10.000.000
2	0	125.000	125.000	10.000.000
3	0	125.000	125.000	10.000.000
4	0	125.000	125.000	10.000.000
5	0	125.000	125.000	10.000.000
6	10.000.000	125.000	10.125.000	0

8.4 SISTEMA DE AMORTIZACIÓN CUOTA FIJA

Este sistema es uno de los más utilizados en el sector financiero y en los establecimientos comerciales, en los cuales se les ofrece crédito a sus clientes a la hora de cerrar una venta.

Este sistema tiene las siguientes características:

- Durante el tiempo del contrato el valor del pago será el mismo.
- Los intereses se calculan sobre el saldo.
- Al inicio del plazo es mayor la participación de los intereses que el abono al principal o capital, dicho en otras palabras, al valor del crédito.
- Los pagos pueden ser vencidos o anticipados.
- Esta cuota normalmente está acompañada por seguros.

Para tener en cuenta:

- VC = Valor del Crédito
- CF = Cuota o pago
- INT = Intereses

- SA = Saldo Anterior
- A = Amortización
- ip = Tasa de Interés Periódico

Ejemplo 3

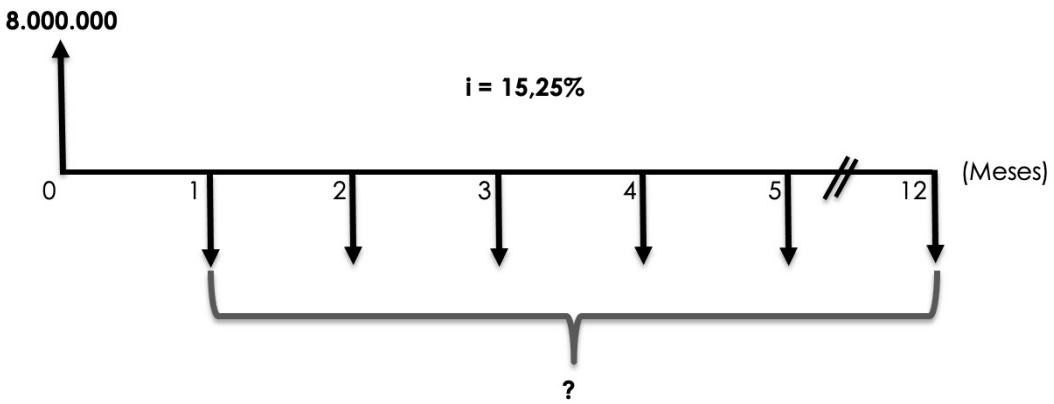
Gabriela obtiene un crédito para comprar su primera máquina industrial por valor de 8.000.000 um, el cual se va a financiar por un año a razón del 15,25%ea, los pagos efectuados mensualmente serán mediante el sistema de cuota fija. ¿Cuál es el valor de los pagos que tendrá que efectuar Gabriela y cómo quedaría la tabla de amortización?

Solución:

$$\mathbf{ip} = [1 + 0{,}1525]^{\frac{1}{12}} - 1 \quad = 0{,}011898 \qquad n = \ 1 \text{ x } 12 = 12$$

VC = 8.000.000 n = 12 ip = 0,011898 kp = mv CF = ?

Gráfica 8-3. Sistema de amortización cuota fija mes vencido



Fx Fórmulas

$$\mathbf{CF} = \mathbf{VC} \div \left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathrm{i}} \right]$$

$$\mathbf{CF} = 8.000.000 \div \left[\frac{1-(1+0,011898)^{-12}}{0,011898} \right]$$

$$\mathbf{CF} = 719.342$$

Respuesta: El valor de cada cuota que debe pagar Gabriela corresponde a **719.342 um** y la tabla de amortización quedaría de la siguiente manera:

Tabla 8-3. Amortización pago al final del periodo

Periodo	Amortización	Intereses	Cuota	Saldo
0				VC
1	CF - INT	SA x ip	CF	S - A

Finalmente, se tendrá la tabla o esquema, la cual refleja el pago o la cuota fija; al final del tiempo, el saldo debe ser cero (0).

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0	0	0	0	8.000.000
1	624.158	95.184	719.342	7.375.842
2	631.584	87.758	719.342	6.744.257
3	639.099	80.243	719.342	6.105.158
4	646.703	72.639	719.342	5.458.455
5	654.398	64.945	719.342	4.804.058
6	662.184	57.159	719.342	4.141.874
7	670.062	49.280	719.342	3.471.812
8	678.035	41.308	719.342	2.793.777
9	686.102	33.240	719.342	2.107.675
10	694.265	25.077	719.342	1.413.410

11	702.526	16.817	719.342	710.884
12	710.884	8.458	719.342	0

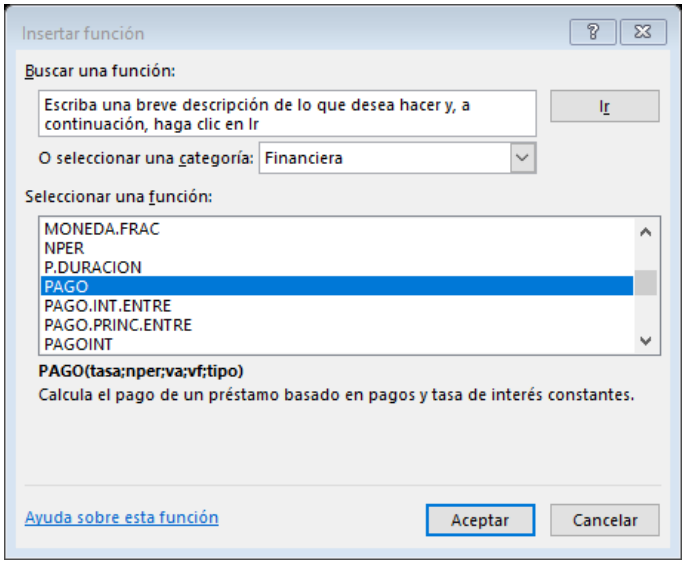
Excel contiene algunas funciones que ayudarían, y la tabla quedaría de la siguiente manera:

Tabla 8-4. Cálculo cuota fija vencida a través de Excel

Capital	8.000.000	8.000.000
Tasa de interés	15,25%	0,011898
Tiempo	1	12
Capitalización	12	MV
Cuota fija	?	?

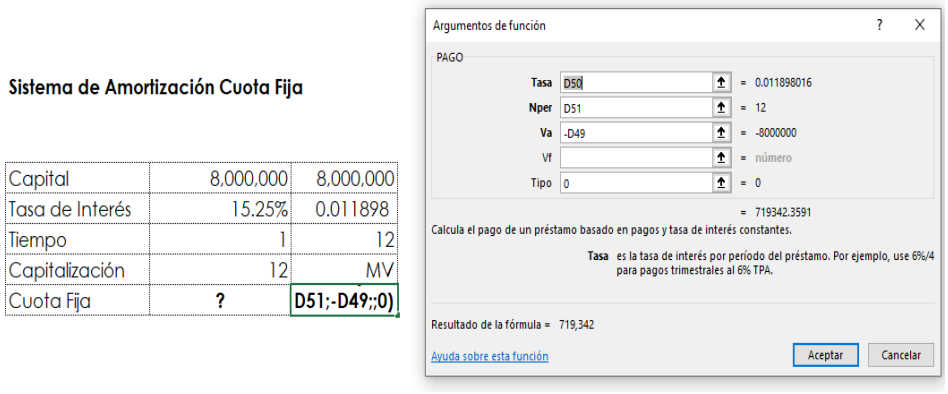
Después desde la celda gris ir a insertar función, financiera, opción PAGO, ver como quedaría:

Imagen 55. Función PAGO



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya contiene la tabla como tasa de interés, número de periodos o tiempo, el valor actual será el valor del activo y tendrá un signo negativo, valor futuro y, por último, tipo, que para este caso es cero (0).

Imagen 56. Función PAGO variables



Luego de tener las variables listas, se ve que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Capital	8.000.000	8.000.000
Tasa de interés	15,25%	0,011898
Tiempo	1	12
Capitalización	12	MV
Cuota fija	?	719,342

Ejemplo 4

Yeimi TC obtiene un crédito para invertir en un negocio de cría, levante y engorde de novillos en el municipio del cual es oriunda su madre, por valor de 50.000.000 um, el cual será financiado por

el único banco del pueblo a tres (3) años, a razón del 12%EA, y los pagos se efectuarán trimestre vencido una vez se reciba el dinero.

Yeimi se pregunta: ¿Cuál será la cuota fija por pagar al final de cada trimestre y cómo quedaría la tabla de amortización para pagar la deuda?

Solución:

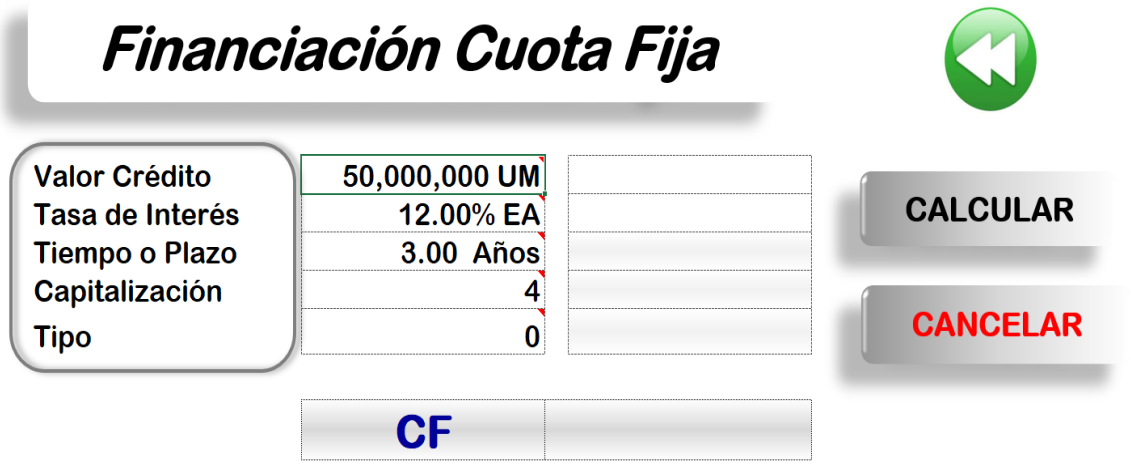
Como su hermano es docente de finanzas en una universidad de la región, ha creado un simulador en Excel y tiene la solución a la pregunta de su hermana. Ver cómo sería esta simulación:

Para dar solución es necesario considerar las siguientes variables.

- Valor del crédito: 50.000.000
- Tasa de interés: 12%
- Plazo: 3 años
- Capitalización: 4 trimestres en el año
- Tipo: Vencido

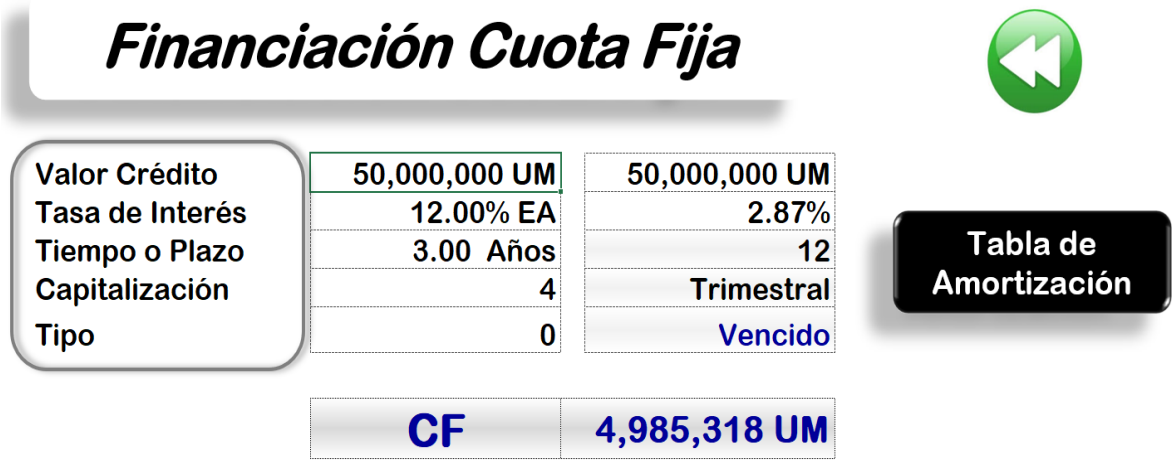
Posteriormente, solo bastó ingresar estos datos y dar clic en el botón Calcular.

Imagen 57. Simulación Cuota Fija



Y este fue el resultado de las variables y de la cuota fija:

Imagen 58. Simulación Cuota Fija Variables

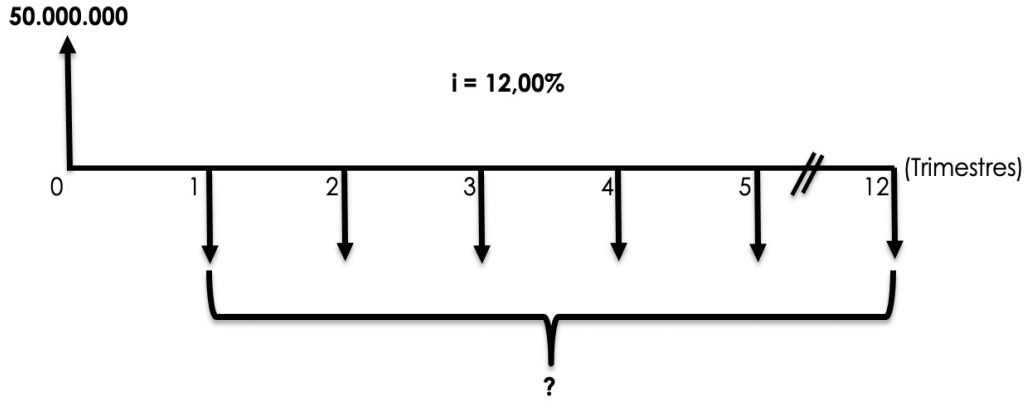


Finalmente, para ver el comportamiento del crédito solo bastó con dar clic en el botón tabla de amortización.

Periodo	Amortización	Interés	Cuota	Saldo
0				50,000,000
1	3,548,451	1,436,867	4,985,318	46,451,549
2	3,650,424	1,334,894	4,985,318	42,801,125
3	3,755,328	1,229,991	4,985,318	39,045,797
4	3,863,246	1,122,073	4,985,318	35,182,551
5	3,974,265	1,011,053	4,985,318	31,208,286
6	4,088,475	896,843	4,985,318	27,119,811
7	4,205,967	779,351	4,985,318	22,913,843
8	4,326,835	658,483	4,985,318	18,587,008
9	4,451,177	534,141	4,985,318	14,135,831
10	4,579,092	406,226	4,985,318	9,556,739
11	4,710,683	274,635	4,985,318	4,846,056
12	4,846,056	139,263	4,985,318	-

Para comprobar el resultado del problema, ver la aplicación para la tasa de interés y para el cálculo de la cuota fija:

Gráfica 8-4. Sistema de amortización cuota fija trimestre vencido



$$\mathbf{ip} = \left[1 + 0{,}1200\right]^{\frac{1}{4}} - 1 \quad = 0{,}028737 \qquad \text{n = 3 x 4 = 12}$$

$$\mathbf{CF} = 50.000.000 \div \left[\frac{1 - \left(1 + 0{,}028737\right)^{-12}}{0{,}028737} \right]$$

$$\mathbf{CF} = 4.985.318$$

Respuesta: El valor por pagar cada trimestre equivale a **4.985.318 um.**

Ejemplo 5

Un cafetero de la región tomó un crédito por un valor de 10.000.000 um para invertir en renovación de sus cafetales, los cuales ya han cumplido su vida útil, el cual será financiado por el único banco del pueblo a 2 años, a razón del 11,80%EA; los pagos se efectuarán bimestre anticipado y una vez se reciba el dinero se descontará el valor de la primera cuota.

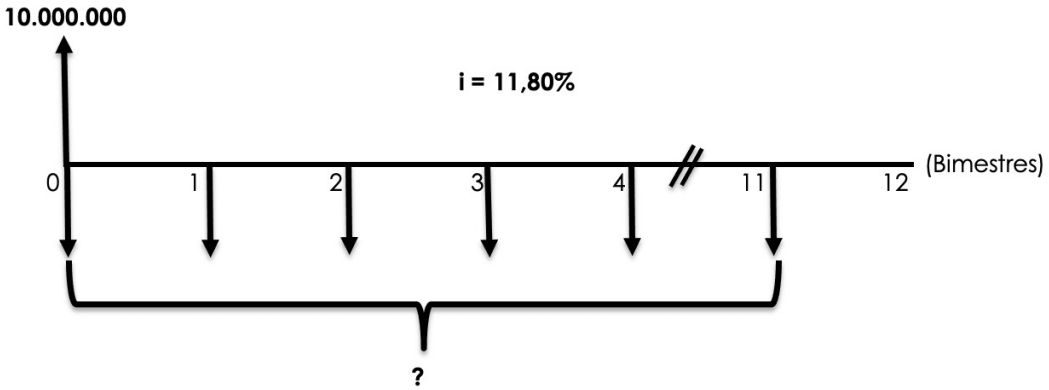
¿Cuál será el valor de la cuota fija por pagar al inicio de cada bimestre y cómo quedaría su tabla de amortización?

Solución:

$$ip = [1 + 0{,}1180]^{\frac{1}{6}} - 1 \quad = 0{,}018764 \qquad n = 2 \text{ x } 6 = 12$$

VC = 10.000.000 n = 12 ip = 0,018764 kp = ba CF = ?

Gráfica 8-5. Sistema de amortización cuota fija bimestre anticipado



Fx Fórmulas

$$\mathbf{CF} = \mathbf{VC} \div \left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathrm{i}} \right] (1+\mathbf{i})$$

$$\mathbf{CF} = 10.000.000 \div \left[\frac{1-(1+0,018764)^{-12}}{0,018764} \right] (1+0,018764)$$

$$\mathbf{CF} = 921.149$$

La tabla de amortización se estima de la siguiente forma:

Tabla 8-4. Amortización cuota fija con pagos anticipados

Periodo	Amortización	Intereses	Cuota	Saldo
0	CF - INT		CF	VC - A
1	CF - INT	SA x ip	CF	S - A

Finalmente, se tendrá la tabla o esquema de amortización, la cual refleja el pago o la cuota fija al final del tiempo; el saldo debe ser cero (0), que para el caso anticipado sería en mes 11.

Periodo	Amortización	Intereses	Cuota	Saldo
0	921.149	0	921.149	9.078.851
1	750.792	170.356	921.149	8.328.059
2	764.880	156.269	921.149	7.563.178
3	779.233	141.916	921.149	6.783.946
4	793.854	127.295	921.149	5.990.092
5	808.750	112.399	921.149	5.181.341
6	823.926	97.223	921.149	4.357.416
7	839.386	81.763	921.149	3.518.030

8	855.136	66.013	921.149	2.662.894
9	871.182	49.967	921.149	1.791.712
10	887.529	33.620	921.149	904.183
11	904.183	16.966	921.149	0

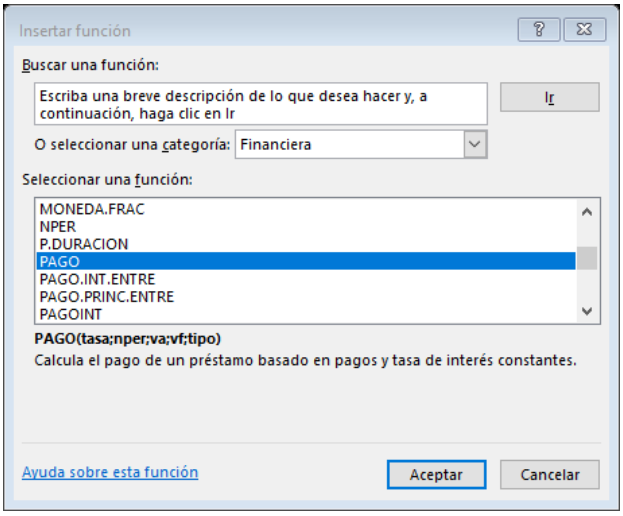
Excel contiene algunas funciones que ayudarían al cálculo de la cuota fija anticipada, y esta quedaría de la siguiente manera:

Tabla 8-5. Cálculo cuota fija anticipada a través de Excel

Capital	10.000.000	10.000.000
Tasa de interés	11,80%	0,018764
Tiempo	2	12
Capitalización	6	ba
Cuota fija	?	?

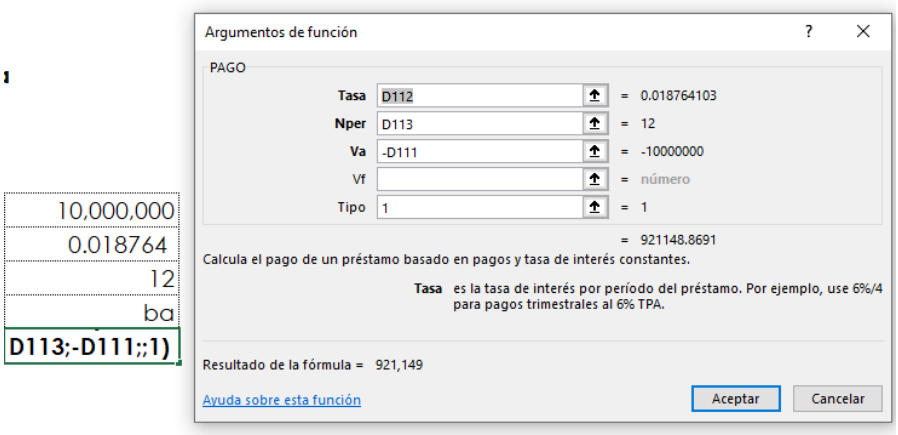
Después desde la celda gris ir a insertar la función *financiera*, opción *PAGO*, ver cómo quedaría esto:

Imagen 59. Función PAGO



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya contiene la tabla como: tasa de interés, número de periodos o tiempo, el valor actual será el valor del activo y tendrá un signo negativo, valor futuro y, por último, tipo, que para este caso es uno (1).

Imagen 60. Función PAGO variables



Luego que dispone de las variables listas, ver que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Capital	10.000.000
Tasa de interés	11,80%
Tiempo	2
Capitalización	6
Cuota fija	?

10.000.000
0,018764
12
ba
921.149

Respuesta: El valor de la cuota fija por pagar al inicio de cada bimestre correspondería a **921.149.**

8.5 SISTEMA CUOTA VARIABLE - AMORTIZACIÓN CONSTANTE

El sistema permite que una deuda se cancele mediante pagos periódicos, en la cual la cuota varía periodo tras periodo; a su vez, la composición del valor por pagar tendrá un componente fijo periodo a periodo, con el cual se disminuye el saldo de la obligación.

Este sistema tiene las siguientes características:

- Durante el tiempo del contrato el valor cambiará de forma decreciente.
- Los intereses se calculan sobre el saldo.
- Al inicio del plazo es mayor la participación de los intereses que el abono al principal o al valor del crédito.
- Los pagos pueden ser vencidos o anticipados.
- Esta cuota normalmente está acompañada por seguros.

Para tener en cuenta:

- VC = Valor del crédito
- INT = Intereses
- C = Cuota
- SA = Saldo anterior
- A = Amortización
- ip = Tasa de interés periódico

Ejemplo 6

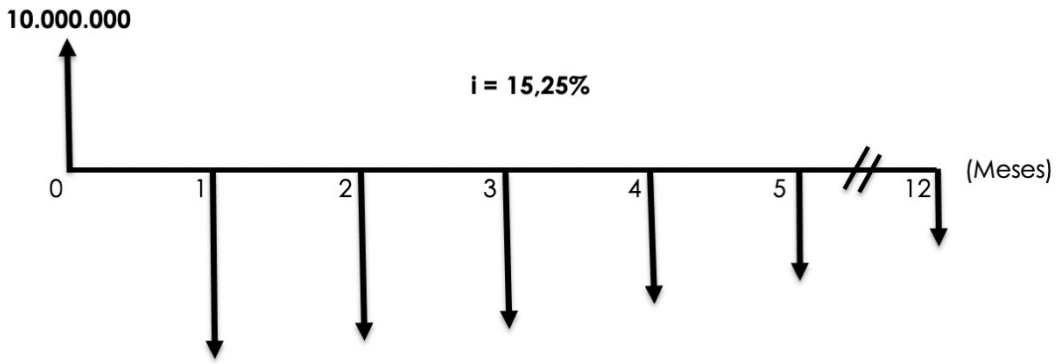
Lussiana BT obtiene un crédito para comprar su primer instrumento de trabajo por valor de 10.000.000 um, el cual se va a financiar en un año a razón del 15,25%EA; los pagos efectuados mensualmente serán mediante el sistema cuota variable con abono constante a capital. ¿Cuál es el valor de los pagos que tendrá que efectuar Lussiana y cómo quedaría la tabla de amortización?

Solución:

$$ip = [1 + 0{,}1525]^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}011898 \qquad n = 1 \times 12 = 12$$

VC = 10.000.000 n = 12 ip = 0,011898 kp = mv

Gráfica 8-6. Sistema cuota variable - Amortización constante



La tabla de amortización se estima de la siguiente forma:

Tabla 8-6. Amortización sistema cuota variable - Amortización constante mes vencido

Periodo	Amortización	Intereses	Cuota	Saldo
0				VC
1	VC ÷ n	SA x ip	A + INT	S - A

Finalmente, se tendrá la tabla o esquema de amortización, la cual refleja el pago o la cuota variable; al final del tiempo, el saldo debe ser cero (0).

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0				10.000.000
1	833.333	118.980	952.313	9.166.667
2	833.333	109.065	942.398	8.333.333
3	833.333	99.150	932.483	7.500.000
4	833.333	89.235	922.568	6.666.667
5	833.333	79.320	912.653	5.833.333
6	833.333	69.405	902.738	5.000.000
7	833.333	59.490	892.823	4.166.667
8	833.333	49.575	882.908	3.333.333
9	833.333	39.660	872.993	2.500.000
10	833.333	29.745	863.078	1.666.667
11	833.333	19.830	853.163	833.333
12	833.333	9.915	843.248	0

Ejemplo 7

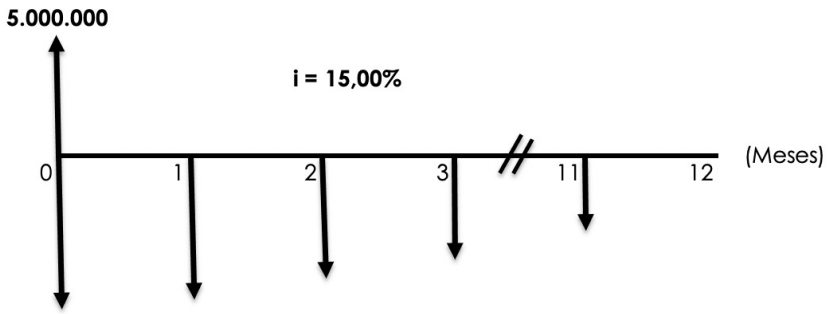
Isabella obtiene un crédito para adquirir su primer Smartphone por valor de 5.000.000 um, el cual se va a financiar en un año a razón del 15%EA; los pagos efectuados mensualmente serán mediante el sistema cuota variable con abono constante a capital de manera anticipada. ¿Cuál es el valor de los pagos que tendrá que efectuar Isabella y cómo quedaría la tabla de amortización?

Solución:

$$ip = [1 + 0{,}1500]^{\frac{1}{12}} - 1 \quad = 0{,}011715 \qquad n = 1 \text{ x } 12 = 12$$

VC = 5.000.000 n = 12 ip = 0,011715 kp = mv

Gráfica 8-7. Sistema cuota variable - Amortización constante



La tabla de amortización se estima de la siguiente forma:

Tabla 8-7. Amortización sistema cuota variable - Amortización constante a capital mes anticipado

Periodo	Amortización	Intereses	Cuota	Saldo
0	VC ÷ n		A + INT	VC - A
1	VC ÷ n	SA x ip	A + INT	S - A

Finalmente, se tendrá la tabla o esquema de amortización, la cual refleja el pago o la cuota variable; al final del tiempo, el saldo debe ser cero (0).

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0	416.667		416.667	4.583.333
1	416.667	53.693	470.360	4.166.667
2	416.667	48.812	465.479	3.750.000
3	416.667	43.931	460.598	3.333.333
4	416.667	39.050	455.716	2.916.667
5	416.667	34.169	450.835	2.500.000
6	416.667	29.287	445.954	2.083.333
7	416.667	24.406	441.073	1.666.667
8	416.667	19.525	436.192	1.250.000
9	416.667	14.644	431.310	833.333
10	416.667	9.762	426.429	416.667
11	416.667	4.881	421.548	0

Ejemplo 8

Alicia obtiene un crédito para invertir en negocio de cría, levante y engorde de novillos en el municipio del cual es oriundo su padre, por valor de 40.000.000 um, el cual será financiado por el único banco del pueblo a tres (3) años a razón del 12%EA; los pagos se efectuarán trimestre vencido una vez recibido el dinero.

Alicia se pregunta: ¿Cuál será el valor de cuota por pagar al final de cada trimestre y cómo quedaría la tabla de amortización para pagar la deuda?

Solución:

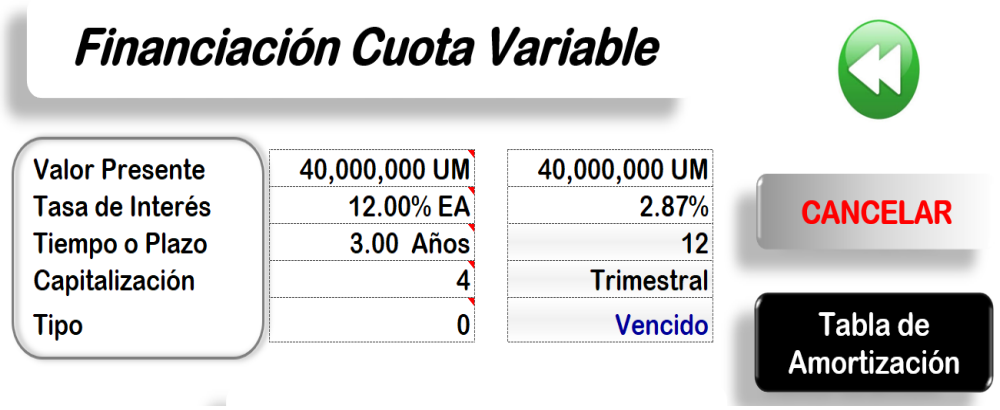
Como el esposo de una de sus hijas es docente de finanzas en una universidad de la región, este ha creado un simulador en Excel y tiene la solución a la pregunta de su suegra. Ver cómo será esta simulación.

Para dar solución fue necesario tener en cuenta las siguientes variables:

- Valor del crédito: 40.000.000
- Tasa de interés: 12%
- Plazo: 3 años
- Capitalización: 4 trimestres en el año
- Tipo: Vencido

Posteriormente, solo bastó con ingresar estos datos y dar clic en el botón *Calcular*.

Imagen 61. Simulación Cuota Fija



Por último, al pulsar en tabla de amortización, este fue el resultado:

Periodo	Amortización	Interés	Pago	Saldo
0				40,000,000
1	3,333,333	1,149,494	4,482,827	36,666,667
2	3,333,333	1,053,703	4,387,036	33,333,333
3	3,333,333	957,911	4,291,245	30,000,000
4	3,333,333	862,120	4,195,454	26,666,667
5	3,333,333	766,329	4,099,663	23,333,333
6	3,333,333	670,538	4,003,871	20,000,000
7	3,333,333	574,747	3,908,080	16,666,667
8	3,333,333	478,956	3,812,289	13,333,333
9	3,333,333	383,165	3,716,498	10,000,000
10	3,333,333	287,373	3,620,707	6,666,667
11	3,333,333	191,582	3,524,916	3,333,333
12	3,333,333	95,791	3,429,124	0

8.6 SISTEMA CUOTA FIJA CON PERIODO DE GRACIA EN EL PAGO

Este sistema, al igual que la cuota fija, mantiene el valor constante de sus depósitos, es solicitado y utilizado en el sector financiero en casos de crisis o cuando el dinero se invertirá en un negocio y, comúnmente, al inicio no se generan los ingresos suficientes; por ello, son necesarios unos periodos de gracia o el no pago de la obligación (cuotas).

Este sistema tiene las siguientes características:

- Durante el tiempo del contrato el valor del pago será el mismo.
- Los intereses se calculan sobre el saldo.
- Al inicio del plazo es mayor la participación de los intereses que el abono al principal o al valor del crédito.
- Los pagos pueden ser vencidos o anticipados.
- Esta cuota normalmente está acompañada por seguros.
- Existen periodos en los cuales no se efectúan pagos.

Para tener en cuenta:

- VC = Valor del crédito
- CF = Cuota o pago
- INT = Intereses
- SA = Saldo anterior
- A = Amortización
- K = Periodo de gracia
- ip = Tasa de interés periódico

EJEMPLO 9

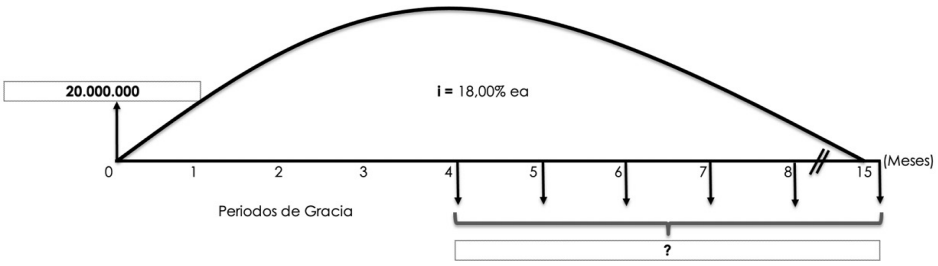
Rocío obtiene un préstamo de una entidad para financiar su negocio por un valor de 20.000.000 um, el cual será pagado con 12 cuotas iguales vencidas a razón del 18%EA y los pagos efectuados serán realizados mensualmente 4 meses después de recibido el dinero. ¿Cuál es el valor que tendrá que efectuar cada mes Rocío y cómo quedaría la tabla de amortización?

Solución:

$$\mathbf{ip} = \left[1 + 0{,}18\right]^{\frac{1}{12}} - 1 \quad = 0{,}013888 \qquad \text{K= 3} \qquad \text{n = 1 x 12 = 12}$$

VC = 20.000.000 n = 12 ip = 0,013888 kp = mv CF = ?

Gráfica 8-8. Amortización cuota fija con gracia en el pago



Fx Fórmulas

$$\mathbf{CF} = \mathbf{VC} \div \left[\frac{1-(1+\mathbf{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathbf{i}}\right](1+\mathbf{i})\,\hat{}\,-\mathbf{k}$$

$$\mathbf{CF} = 20.000.000 \div \left[\frac{1-(1+0{,}013888)^{-12}}{0{,}013888}\right](1+0{,}013888)\,\hat{}\,-3$$

$$\mathbf{CF} = 1.897.856$$

Respuesta: El valor de cada cuota que debe pagar Rocío corresponde a **1.897.856 um** y la tabla de amortización quedaría de la siguiente manera:

Tabla 8-8. Amortización cuota fija con gracia en el pago

Periodo	Amortización	Intereses	Cuota	Saldo
0				VC
1	CF - INT	SA x ip		S - A
4	CF - INT	SA x ip	CF	S - A

Finalmente, se tendría una tabla o esquema, la cual refleja el pago o la cuota fija; al final del tiempo, el saldo debe ser cero (0), teniendo en cuenta que hay 3 periodos de gracia, los pagos se efectúan desde el periodo 4 y se extenderán hasta el 15, de esta manera se cumplirá el mutuo o contrato del crédito de 12 pagos iguales.

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0				20.000.000
1	-277.769	277.769		20.277.769
2	-281.626	281.626		20.559.395
3	-285.538	285.538		20.844.933
4	1.608.352	289.503	1.897.856	19.236.581
5	1.630.690	267.166	1.897.856	17.605.891
6	1.653.337	244.518	1.897.856	15.952.553
7	1.676.300	221.556	1.897.856	14.276.254
8	1.699.581	198.275	1.897.856	12.576.673
9	1.723.185	174.670	1.897.856	10.853.488

10	1.747.118	150.738	1.897.856	9.106.370
11	1.771.382	126.473	1.897.856	7.334.987
12	1.795.984	101.871	1.897.856	5.539.003
13	1.820.928	76.928	1.897.856	3.718.076
14	1.846.217	51.638	1.897.856	1.871.858
15	1.871.858	25.997	1.897.856	0

Como se puede observar en los primeros periodos, estos generan intereses, los cuales suman a la deuda; solo a partir del periodo 4 en el cual se inician los depósitos, este saldo empieza a menguar hasta ser cero (0) en la cuota 15.

En Excel quedaría de la siguiente manera:

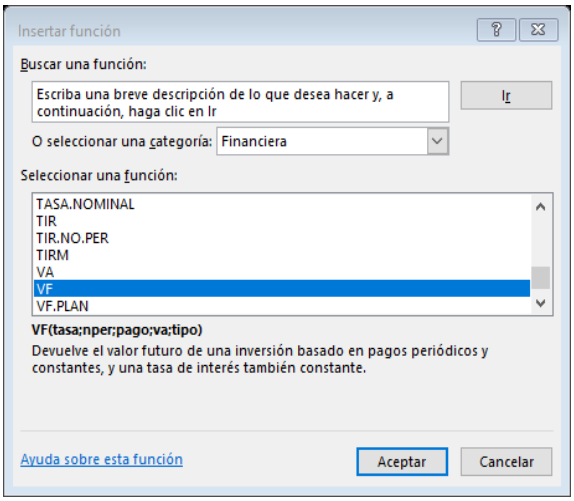
Tabla 8-9. Cálculo cuota fija con gracia en el pago

Valor del crédito	20.000.000	20.000.000
Tiempo (años)	1	12
Periodos de gracia	3	3
Tasa de interés (EA)	18%EA	0,013888
Capitalización	12	mv
Valor futuro	?	?
Cuota	?	?

Como no existe una función en Excel que calcule esta cuota, sin embargo, es posible determinarla con la Fx *Pago* una vez calculado el valor futuro de los periodos de gracia con la VF.

Para ello, es necesario ubicarse en la celda gris que corresponde al valor futuro y calcular este con la función:

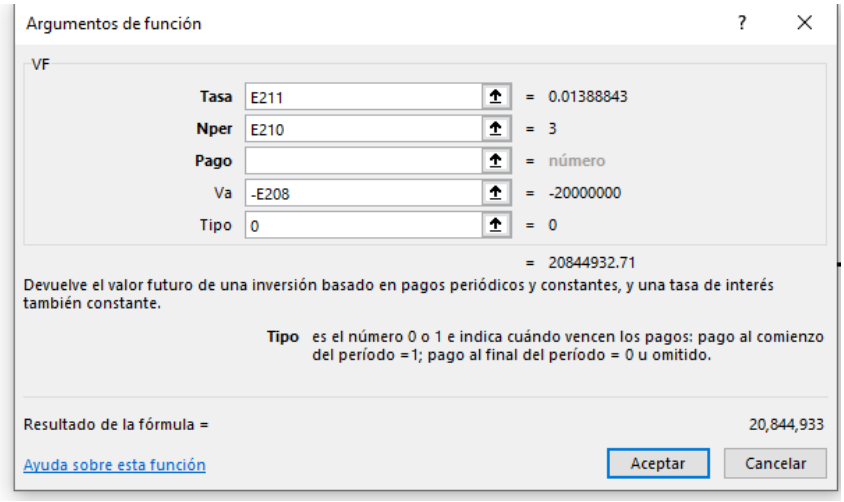
Imagen 62. Función VF



Con base en la información de la tabla, seleccionar las variables solicitadas por la ventana como son: tasa de interés, número de periodos, valor del crédito o valor actual con signo negativo y tipo cero (0), y posteriormente, pulsar en *Aceptar*. Ver cómo es esto:

Imagen 63. Función VF variables

20,000,000
12
3
0.013888
mv
0;;-E208;0)
?

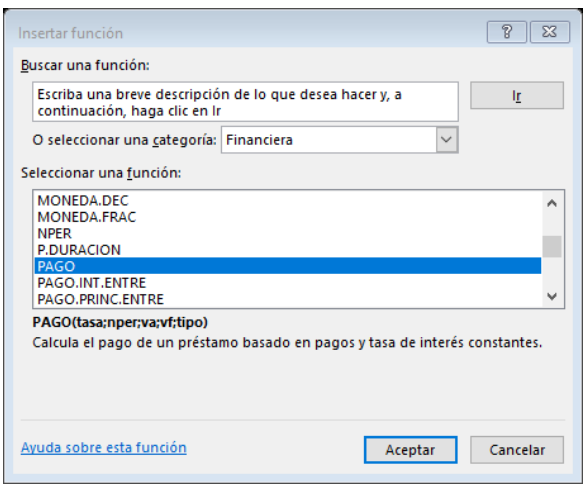


El resultado será el siguiente:

Valor del crédito	20.000.000	20.000.000
Tiempo (años)	1	12
Periodos de gracia	3	3
Tasa de interés (EA)	18%EA	0,013888
Capitalización	12	mv
Valor futuro	?	20.844.933
Cuota	?	?

Una vez se tiene el valor futuro, se procede a calcular la cuota fija mediante la utilización de la función *PAGO*, para ello es necesario ubicarse en la celda del último interrogante:

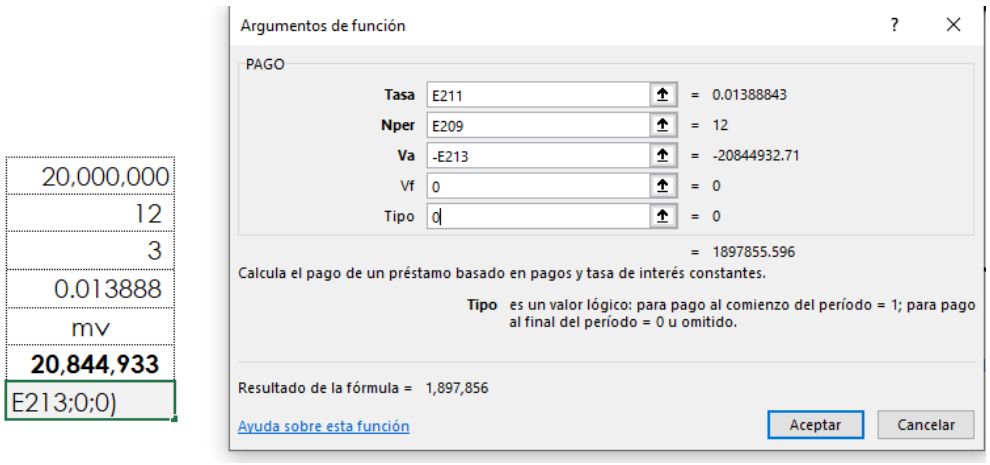
Imagen 64. Función PAGO



Según la información de la tabla, se debe seleccionar las variables solicitadas por la ventana como: tasa de interés, número de periodos, valor

del crédito o valor actual con signo negativo, este será el valor futuro que se calculó anteriormente, valor futuro y tipo cero (0) y luego pulsar en *Aceptar*. Ver cómo sería esto:

Imagen 65. Función PAGO variables



El resultado será el siguiente:

Valor del crédito	20.000.000	20.000.000
Tiempo (años)	1	12
Periodos de gracia	3	3
Tasa de interés (EA)	18%EA	0,013888
Capitalización	12	mv
Valor futuro	?	20.844.933
Cuota	?	1.897.856

PROBLEMAS

1. Gabriel CS obtiene un crédito para comprar su primer apartamento por valor de 100.000.000 um, el cual se va a financiar en 10 años a razón del 10%EA y los pagos efectuados mensualmente serán mediante el sistema de cuota fija. ¿Cuál es el valor de los pagos que tendrá que efectuar Gabriel y cómo quedaría la tabla de amortización?

   Respuesta: 921.149.

2. Guillermo CS obtiene un crédito para comprar su primer computador por valor de 10.000.000 um, el cual se va a financiar en un año a razón del 10%EA, los pagos serán efectuados mensualmente por anticipado mediante el sistema de cuota variable con abono constante a capital. ¿Cuál es el valor de los pagos que tendrá que efectuar Guillermo y cómo quedaría la tabla de amortización?

3. Luz Marina obtiene un préstamo de una entidad para financiar su negocio por un valor de 30.000.000 um, el cual será pagado con 12 cuotas iguales vencidas a razón del 18,8%EA, los pagos efectuados serán realizados mensualmente 4 meses después de recibido el dinero. ¿Cuál es el valor que tendrá que pagar cada mes Luz Marina y cómo quedaría la tabla de amortización?

   Respuesta: 2.861.782.

9. Evaluación de proyectos

"Se define como la herramienta que permite determinar si una inversión es viable financieramente o no, una vez se estime una serie de indicadores"

Uno de los dilemas de invertir en un negocio, adquirir un activo o simplemente emprender una actividad es saber con antelación si desde lo financiero este será benéfico; sin embargo, es posible realizar un estudio financiero previo a la decisión de invertir o no, el cual consiste en recopilar una serie de información relacionada con costos, gastos, costos de capital, políticas de crecimiento, impuestos locales, etc., con el fin de establecer informes financieros y, con base en ellos, determinar unos indicadores que permitirán al inversor orientarse y así tomar una decisión asertiva. (Triana, 2021)

Algunas de las variables a considerar en la evaluación de proyectos de inversión son: la Tasa de Descuento, Valor Presente Neto, Tasa Interna de Retorno, el Periodo de Recuperación de la Inversión.

9.1 FLUJO DE CAJA LIBRE

Para la evaluación de proyectos es base fundamental los Flujos de Caja Libre – FCL o también denominados Flujos Netos de Efectivo FNE; éstos son el resultado de la diferencia estructurada de los ingresos y egresos de una inversión durante su vida útil o periodos de evaluación, dicho de otra forma, son los saldos de tomar los ingresos y restar los costos y gastos en periodo determinado.

Los flujos de caja libre pueden ser construidos para suministrar información de los inversionistas, considerando las fuentes de financiación, las cuales básicamente son los recursos aportados por los socios o recursos propios y, los obtenidos por terceros, donde normalmente, éstos son prevenientes del sistema financiero formal vía créditos o préstamos.

Los elementos a tener en cuenta a la hora de construir un FCL para evaluar proyectos de inversión son: Los ingresos, los costos de producción, los gastos de administración y ventas, los impuestos y finalmente, las fuentes de incoación.

Cuando un proyecto no tiene financiación con terceros, de modo que los recursos disponibles de los socios son más que suficientes para colocar en marcha la iniciativa económica, lo anterior, se le consideran recursos propios, de manera que, los FCL obtenidos se les denomina, FLC económicos, por consiguiente, los indicadores estimados de estos tendrán la misma denominación.

Caso contrario sucede, cuando los recursos propios son insuficientes para financiar el proyecto y, en respuesta a esta situación se acude a tomar un crédito con el sistema. La construcción de este flujo de caja es denominada, FCL financiado y los indicadores obtenidos de él, también tendrán la misma distinción; como VPN financiado, TIR financiada etc.

A continuación, se presenta la estructura Flujo de Caja Libre Económico

Tabla 9-1. FCL Económico

Ítems
(+) Ingresos
(-) Costos de Producción
(=) Utilidad Bruta
(-) Gastos de Operativos
Gastos de Administración
Gastos de Ventas
Gastos Financieros
Otros
(=) Utilidad Operacional
(-) Impuestos o Tasas Impositivas
(=) Utilidad del Ejercicio

(+) Depreciación
(=) Flujo Neto
(-) Inversión Inicial
(-) Otras Inversiones
(+) Valor de Desecho
(=) Flujo de Caja Libre - FCL

A continuación, se presenta la estructura Flujo de Caja Libre Financiero

Tabla 9-2. FCL Financiero

Ítems
(+) Ingresos
(-) Costos de Producción
(=) Utilidad Bruta
(-) Gastos de Operativos
Gastos de Administración
Gastos de Ventas
Gastos Financieros
Otros
(=) Utilidad Operacional
(-) Impuestos o Tasas Impositivas
(=) Utilidad del Ejercicio
(+) Depreciación
(-) Amortización Crédito
(=) Flujo Neto

(-) Inversión Inicial
(+) Crédito
(-) Otras Inversiones
(+) Valor de Desecho
(=) Flujo de Caja Libre - FCL

Los FCL o FNE son utilizados para el cálculo de los indicadores de evaluación de proyectos de inversión, tales como: VPN, TIR, RCB entre otros.

9.2 TASA DE DESCUENTO (TD)

La Tasa de Descuento en un valor relativo está compuesta por diferentes variables, de acuerdo con el modo o método de cálculo; en el modelo de evaluación de activos intervienen ítems como el costo del patrimonio o también denominado recursos propios, con destino a una inversión, el costo de la deuda o recursos de terceros y, finalmente, la carga impositiva por parte del Gobierno. (Baca Urbina, 2016)

La Tasa de Descuento busca actualizar los ingresos que se percibirán en el futuro para compensar los efectos macroeconómicos que sufre el dinero, como lo es la pérdida de poder adquisitivo por causa de la inflación; en el caso de las inversiones permite establecer la tasa mínima de rendimiento de una inversión, que le posibilite a los inversores o dueños del capital subsanar costes de capital, otras opciones de inversión, inflación y devaluación, entre otras. Ver cómo poder estimarla:

El Costo Promedio Ponderado de Capital (CPPC) es uno de los métodos más usuales a la hora de calcular una Tasa de Descuento para evaluar inversiones, también es conocido con la sigla en inglés WACC y para otros teóricos la Tasa Mínima de Rentabilidad Aceptada (TMAR).

Para ello es necesario contar con la siguiente información:

- Costo del patrimonio (Cp).
- Participación del patrimonio o los recursos propios en la inversión total (Pp).
- Costo de la deuda o préstamos con terceros (Cd).
- Participación de la deuda o los recursos de terceros en la inversión total (Pd).
- Impuestos o carga impositiva (Imp).
- Inversión Total (IT).

Fx Fórmulas

$$\mathbf{CPPC} = (\mathrm{Cp} \times \mathrm{Pp}) + (\mathrm{CdxPd})(1 - \mathrm{Imp})$$

Ejemplo 1

Una persona requiere determinar cuánto debe rentar su negocio, si este cuenta con las siguientes obligaciones y variables: un crédito financiado a razón del 12%por valor de 20.000 um, por su parte el dueño del negocio aportó 85.000 um y estima un costo por su dinero del 10% finalmente, el Gobierno determina como impuesto de renta el 25%sobre utilidades. ¿Cuál es la tasa mínima de rendimiento o descuento que su negocio debe rentar?

Solución:

El caso muestra la siguiente información:

$$\mathrm{Cd} = 0{,}12 \qquad \mathrm{Cp} = 0{,}10 \qquad \mathrm{Imp} = 0{,}25 \qquad \mathrm{D} = 20.000 \qquad \mathrm{RP} = 85.000$$

Por lo anterior, se debe sumar la deuda y los recursos propios para determinar el valor de la inversión.

$$IT = 20.000 + 85.000 = 105.000$$

Por otro lado, la Pp será igual a: $20.000 / 105.000 = 0,1905$,
$Pd = 85.000 / 105.000 = 0,8095$

Finalmente, las variables quedarán de la siguiente forma:

$Cd = 0,12$ $Cp = 0,10$ $Imp = 0,25$ $Pd = 0,1905$ $Pp = 0,8095$ $TD = ?$

$$\mathbf{CPPC} = (0,10 \times 0,8095) + (0,12x0,1905)(1 - 0,25)$$

$$\mathbf{CPPC} = (0,0981)$$

Respuesta: El negocio requiere una tasa mínima o descuento del **9,81%**

Ejemplo 2

Determinar la Tasa de Descuento para los siguientes datos:

$Cd = 20\%$ $Cp = 12\%$ $Imp = 34\%$ $Deuda = 12.000.000$

Recursos propios = 100.000.00 $TD = ?$

Solución:

Imagen 66. Costo Promedio Ponderado de Capital - WACC

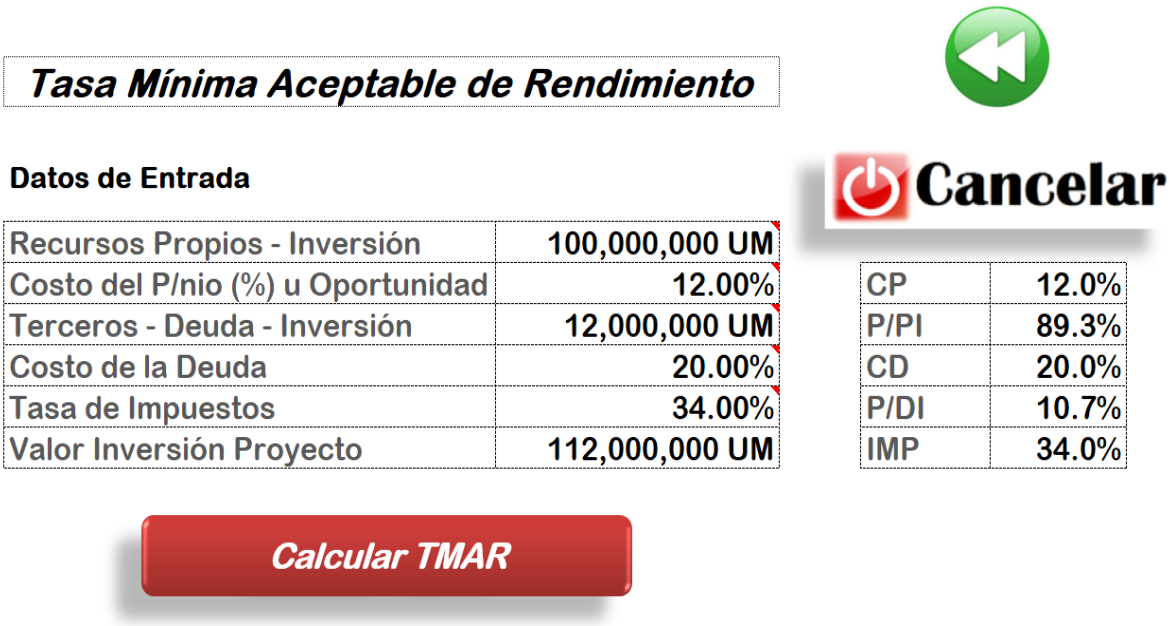
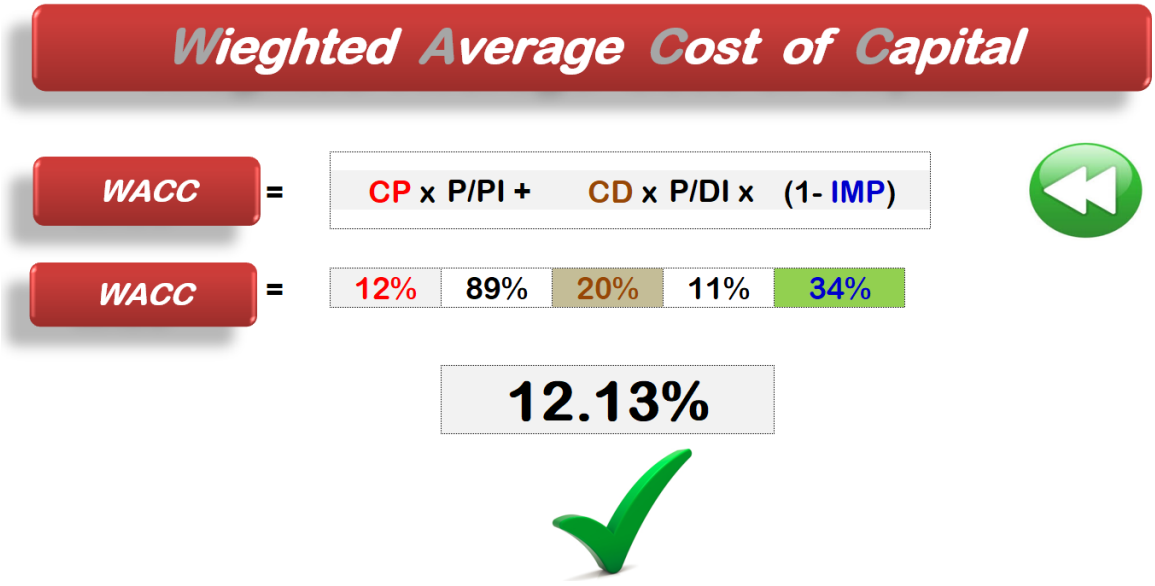


Imagen 67. Resultado Costo Promedio Ponderado de Capital



Respuesta: La Tasa de Descuento será igual al **12,13%**

9.3 VALOR PRESENTE NETO (VPN)

El Valor Presente Neto o VPN representa la diferencia entre los beneficios esperados actualizados o traídos a valor presente, frente al valor de la inversión; dicho en otras palabras, es determinar si invertir hoy una cantidad de dinero representa rentable, factible o simplemente a retribución compensa lo invertido (Córdoba, 2011).

A la hora de evaluar proyectos de inversión de renta variable, es un indicador que determina de acuerdo con su resultado un gran porcentaje entre la decisión de invertir o no, dado que en el caso de que su valor sea negativo, de primera plana y asumiendo que la información suministrada es ajustada a la realidad, la decisión será no invertir.

Definición

Es la diferencia de la sumatoria de los flujos netos actualizados frente a la inversión inicial.

Ver cómo calcular el VPN:

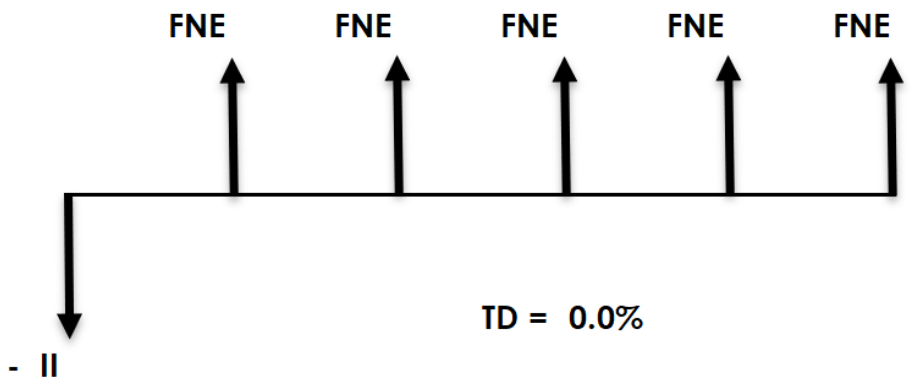
Fx Fórmulas

$$VPN = -II + \sum \frac{FNE}{(1+TD)n}$$

En la cual:

- VPN = Valor Presente Neto
- II = Inversión Inicial
- FNE = Flujos Netos de Efectivo o Ingresos esperados
- TD = Tasa de Descuento
- n = Es la vida útil del proyecto u horizonte.

Gráfica 9-1. Flujo de caja del VPN



Criterios para tener en cuenta a la hora de evaluar el VPN:

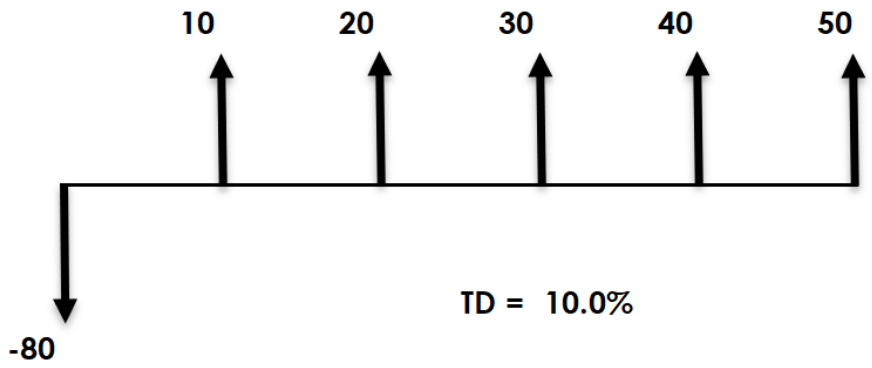
- VPN < 0 = La inversión es desfavorable.
- VPN = 0 = La decisión genera muchas dudas e incertidumbre.
- VPN > 0 = La inversión es favorable.

Ver algunas aplicaciones:

Ejemplo 3

Teniendo en cuenta el siguiente flujo de caja determinar mediante el VPN si el proyecto es favorable o no.

Gráfica 9-2. Flujo de caja para el cálculo del VPN



Solución:

Para iniciar es necesario actualizar o traer a valor presente cada ingreso desglosando la fórmula de esta forma:

0	1	2	3	4	5
- II	fne1	fne2	fne3	fne4	fne5
	$(1+i)^1$	$(1+i)^2$	$(1+i)^3$	$(1+i)^4$	$(1+i)^5$

Sustituyendo:

0	1	2	3	4	5
-80	10	20	30	40	50
-80	$(1+0,1)^1$	$(1+0,1)^2$	$(1+0,1)^3$	$(1+0,1)^4$	$(1+0,1)^5$

El resultado es:

0	1	2	3	4	5
-80	10	20	30	40	50
-80	9,09	16,53	22,54	27,32	31,05

Finalmente, se suman los resultados y el valor obtenido es:

VPN = 26,53

Respuesta: Teniendo en cuenta los criterios de evaluación con respecto al VPN, la inversión es favorable dado que el VPN es positivo y equivalente a **26,53.**

En Excel quedaría de la siguiente manera:

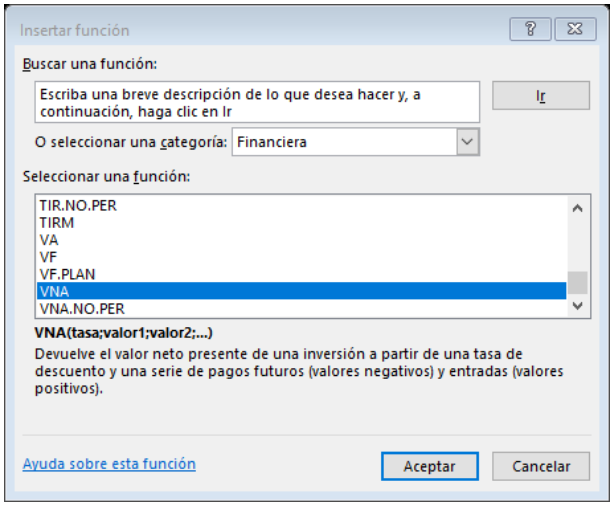
Para resolver el caso y hallar en Excel el VPN se utilizará la función VNA, pero antes es necesario elaborar una tabla como la siguiente:

Tabla 9-3. Cálculo del VPN en Excel

VPN	TD	1	2	3	4	5	II
	10%	10	20	30	40	50	-80

Para ello es necesario ubicarse en la cela de color amarillo y posteriormente ir a insertar función para elegir financiera, VNA y por último *Aceptar*:

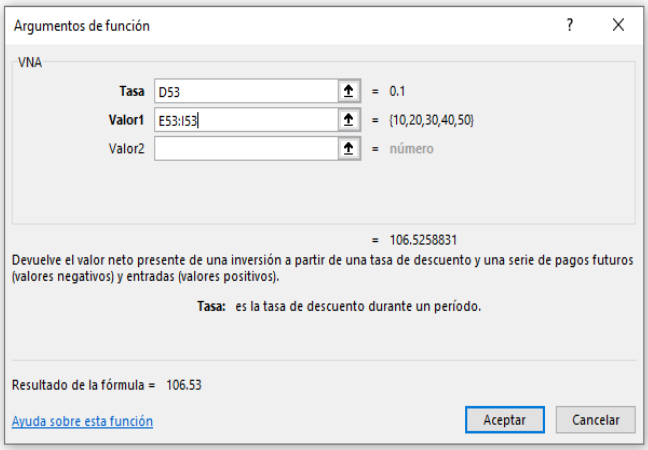
Imagen 68. Función VNA



Una vez se tiene la nueva ventana, esta solicitará la tasa, que para el caso será la Tasa de Descuento; en valor 1 ir a seleccionar desde el año 1 hasta el 5 y luego dar clic en *Aceptar*. Ver cómo hacerlo:

Imagen 69. Función VNA Variables

VPN	TD	1	2	3	4	5
E53:I53)	10.0%	10	20	30	40	50



De lo anterior se tendrá lo siguiente:

VPN	TD	1	2	3	4	5	II
106.53	10 %	10	20	30	40	50	-80

Por el momento se tendrá el valor presente de los 5 periodos actualizados a la Tasa de Descuento, por último, editar la celda amarilla con F2 y al final o inicio sumar la inversión inicial:

	VPN	TD	1	2	3	4	5	II
=VNA(D53;E53:I53)+J53			10	20	30	40	50	-80

Finalmente se obtendrá el siguiente resultado:

VPN	TD	1	2	3	4	5	II
26.53	10 %	10	20	30	40	50	-80

Respuesta: Teniendo en cuenta los criterios de evaluación con respecto al VPN, la inversión es favorable dado que el VPN es positivo y equivalente a **26,53.**

Ejemplo 4

Un inversionista desea conocer si invertir en un negocio es favorable o no, para lo cual dispone de la siguiente información:

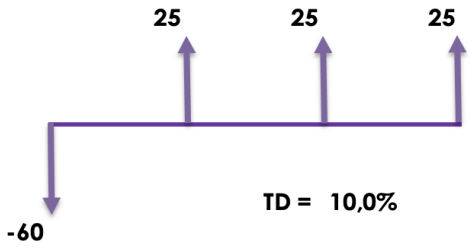
El valor requerido para que el negocio inicie operaciones es de 60.000 USD, una vez proyectado el flujo de caja, se obtuvieron unos FNE de 25.000 USD para cada uno de los tres periodos y se estima descontar los flujos a una tasa del 10%

Solución:

Según la información suministrada, se tienen los siguientes datos:

II = 60.000 TD = 10% FNE = 25.000 VPN = ?

Gráfica 9-3. Flujo de caja con FNE constantes



Fx Fórmulas

$$VPN = -II + \sum \frac{FNE}{(1+\mathbf{TD})\mathbf{n}}$$

0	1	2	3
-60.000	25.000	25.000	25.000
-60.000	22.727	20.661	18.783

Finalmente, es necesario sumar los resultados y el valor obtenido es:

VPN = 2.171,30

Respuesta: Teniendo en cuenta que el valor VPN es positivo, con un valor equivalente a **2.171,30**, desde lo técnico-financiero es preciso afirmar que es favorable invertir en el negocio.

Considerando que el caso propuesto refleja FNE constantes, es posible solucionar este caso a través del valor presente de una anualidad vencida.

Ver cómo es esto:

II = 60.000 TD = 10% FNE = 25.000 VPN = ?

Fx Fórmulas

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \mathbf{II}$$

Sustituyendo se tendría lo siguiente:

$$\mathbf{P} = 25.000\left[\frac{1-(1+0,10)^{-3}}{0,10}\right] - 60.000$$

$$\mathbf{P} = 2.171$$

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Para resolver el caso y hallar en Excel el VPN se debe utilizar la función VNA, pero antes es necesario elaborar una tabla como la siguiente:

Tabla 9-4. Cálculo del VPN con FNE constantes en Excel

VPN	TD	0	I.I	2	3
	10 %	-60.000	25.000	25.000	25.000

Una vez elaborada la tabla de Excel con la Tasa de Descuento, los FNE y la Inversión Inicial, ubicarse en la celda amarilla donde se calculará el indicador. Posteriormente, digitar =VNA(, seleccionar la tasa, luego los tres FNE, cerrar paréntesis y por último se suma la II y luego dar clic en *Aceptar*:

	VPN	TD	0	1	2	3
=VNA(M77;O77:Q77)+N77			-60,000	25,000	25,000	25,000

El resultado es:

VPN	TD	0	I.I	2	3
2.171	10 %	-60.000	25.000	25.000	25.000

Como se observa, coincide el valor obtenido de la fórmula con el resultado de la función, con un VPN equivalente a 2.171.

Ejemplo 5

Una máquina produce 1.800 unidades mensuales, las cuales deben venderse a $ 80 c/u. El estado actual de la máquina es regular y si no se repara podrá funcionar durante seis meses más y luego proceder a desecharla, pero si hoy le hacemos una reparación total, esta tiene un costo de $ 1.500.000, lo cual garantiza que la máquina podrá servir durante un año contado a partir de la reparación. Suponiendo una tasa del 4% ¿desde lo financiero será aconsejable repararla?

Solución:

Se cuenta con los siguientes datos:

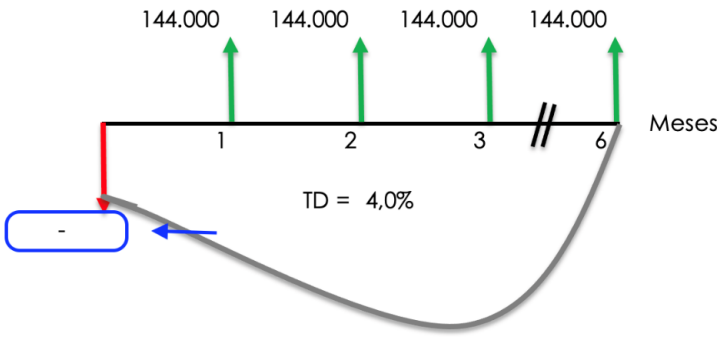
Caso 1: No reparar

Producción: Teniendo en cuenta que se producen 1.800 unidades al mes, esta cantidad se multiplica por el precio de ellas.

$$1.800 \text{ x } 80 = 144.000 \text{ cada mes.}$$

II = 0 TD = 4% FNE = 144.000 n = 6 VP = ?

Gráfica 9-4. Flujo de caja ingresos máquina con FNE constantes



Fx Fórmulas

$$VPN = -II + \sum \frac{FNE}{(1+TD)n}$$

Dado que para el caso 1 no hay inversión, solo basta con actualizar los 6 ingresos de la siguiente manera:

1	2	3	4	5	6
144.000	144.000	144.000	144.000	144.000	144.000
$(1+0,04)^1$	$(1+0,04)^2$	$(1+0,04)^3$	$(1+0,04)^4$	$(1+0,04)^5$	$(1+0,06)^5$

1	2	3	4	5	6
144.000	144.000	144.000	144.000	144.000	144.000
138.462	133.136	128.015	123.092	118.358	113.805

Finalmente se debe sumar los resultados y el valor obtenido es:

VP = 754.868

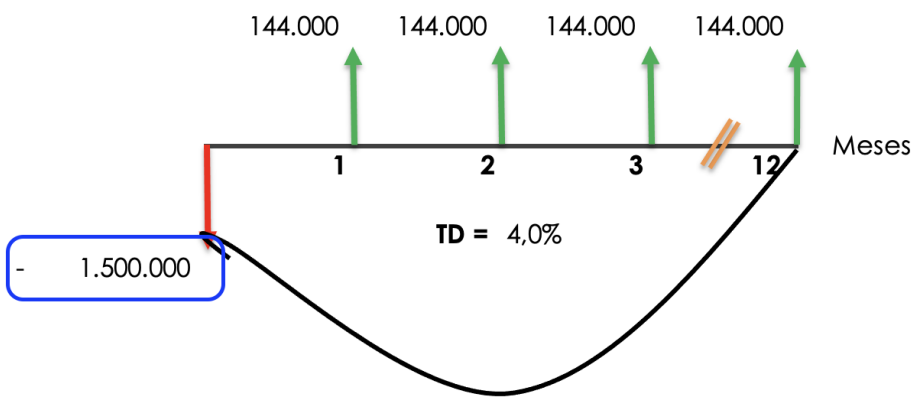
Caso 2 - Reparar, para ello se tiene lo siguiente:

Producción: Teniendo en cuenta que se producen 1.800 unidades al mes, este se multiplica por el precio de ellas.

1.800 x 80 = 144.000 cada mes.

II = 1.500.000 TD = 4% FNE = 144.000 n = 12 VPN = ?

Gráfica 9-5. Flujo de caja ingresos máquina caso 2, con FNE constantes



Fx Fórmulas

$$\mathbf{P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - II}$$

$$P = 144.000\left[\frac{1-(1+0,04)^{-12}}{0,04}\right] - 1.500.00$$

$$\mathbf{P = -148.549}$$

Respuesta: Considerando las dos opciones de reparar y no reparar, y evaluando los flujos y la inversión con la técnica de valor presente y Valor Presente Neto, lo más aconsejable es no reparar teniendo en cuenta que sin invertir dinero se obtienen beneficios por valor de **$ 754.868**, mientras que al reparar es necesario invertir $ 1.500.000 y, en consecuencia, su valor presente es negativo, es decir, no es favorable financieramente.

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Para resolver el caso y hallar en Excel el VPN se utilizará la función VNA, pero antes es necesario elaborar una tabla como la siguiente:

Tabla 9-5. Cálculo del VPN con FNE constantes en Excel

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000

TD	4%		I.I	- 1,500,000		VPN	

Una vez elaborada la tabla de Excel con la Tasa de Descuento, los FNE y la Inversión Inicial se debe ubicar en la celda para determinar el VPN donde se calculará el indicador. Posteriormente, digitar =VNA(, seleccionar la tasa, luego los 12 FNE, cerrar paréntesis y por último sumar la II y luego dar clic en *Aceptar*. Ver como sería esto:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000

TD	4%	I.I	- 1,500,000	=VNA(I139;F137:Q137)+L139	

VNA(tasa; valor1; [valor2]; [valor3]; ...)

El resultado es:

TD	4%	II	- 1.500.000	VPN	- 148.549

Como se observa, coincide el valor obtenido de la fórmula y de la función, con un VPN equivalente a –148.549.

9.4 TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)

Es aquel valor relativo o porcentual que corresponde al promedio que un inversionista espera recibir cada año del valor invertido en la actividad económica o proyecto.

Visto desde otra perspectiva, la TIR hace referencia al valor porcentual que la actividad productiva genera, es decir, beneficios que cubran sus costos y gastos y, adicional a ello, hay un excedente que permita retornar parte del dinero a la fuente de financiación. (Triana, 2021)

Desde el punto de vista matemático, la TIR se refiere a igualar a cero (0) el Valor Presente Neto y permite establecer una tasa que haga o transforme los FNE en un valor igual al de la inversión. (Triana, 2021)

Los criterios por considerar para la TIR a la hora de evaluar un proyecto son, como primera medida, que el VPN sea positivo, de no ser así, no se calculan más indicadores y el proyecto es rechazado; de ser positivo, esta deberá

ser superior a la Tasa de Descuento para establecer que la inversión es favorable o factible. (Baca Urbina, 2016)

TIR para flujos constantes:

Ejemplo 6

Cuál será el retorno de un inversionista si dispone de la siguiente información:

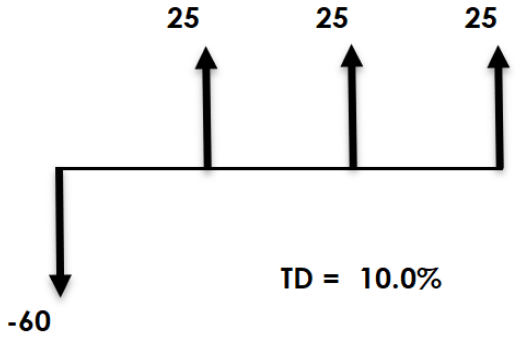
El valor requerido para que el negocio inicie operaciones es de 60.000 USD, una vez proyectado el flujo de caja se obtuvieron unos FNE de 25.000 USD para cada uno de los tres periodos; se estima descontar de los flujos una tasa del 10%y finalmente un VPN de 2.171.

Solución:

Se Tienen los siguientes datos:

II = 60.000 TD = 10% FNE = 25.000 VPN = 2.171 TIR = ?

Gráfica 9-6. Flujo de caja con FNE constantes



Fx Fórmulas

$$\mathbf{TIR} = \mathbf{FNE}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \mathbf{II} = 0$$

Sustituyendo se tendrá,

$$\mathbf{TIR} = 25.000\left[\frac{1-(1+i)^{-3}}{i}\right] - 60.000 = 0$$

Luego se procede a despejar.

$$\mathbf{TIR} = 25.000\left[\frac{1-(1+i)^{-3}}{i}\right] = 60.000$$

$$\mathbf{TIR} = \left[\frac{1-(1+i)^{-3}}{i}\right] = (60.000 \ / 25.000)$$

$$\mathbf{TIR} = \left[\frac{1-(1+i)^{-3}}{i}\right] = 2.4$$

Como la incógnita se encuentra en el numerador y denominador, el proceso por seguir es iterar, es decir, asignar valores a i, de tal manera que se encuentre un valor que, al ser operado en la ecuación, sea igual a 2,4; cuando esto suceda, se ha encontrado el valor de la TIR:

Cuando i = 10% entonces:

$$\left[\frac{1-(1+0,10)^{-3}}{0,10}\right] = 2,49$$

En este caso, el resultado es superior a 2,40, ahora es necesario sustituir con un valor menor para ver el resultado.

Cuando i = 8% entonces:

$$\left[\frac{1-(1+0,08)^{-3}}{0,08}\right] = 2,58$$

Como se observa el resultado aumentó, es decir, que existe una relación inversa; por tal motivo, la línea para hallar el 2,40 es aumentar.

Cuando i = 11% entonces:

$$\left[\frac{1-(1+0{,}11)^{-3}}{0{,}11}\right] = 2{,}44$$

Cuando i = 12% entonces:

$$\left[\frac{1-(1+0{,}12)^{-3}}{0{,}12}\right] = 2{,}40$$

En este caso se ha encontrado la tasa que hay que sustituir y el resultado es 2,40, eso indica que la TIR equivale al 12%

i	i	i	i
10%	8%	11%	12%
2,49	2,58	2,44	2,40

Respuesta: La Tasa Interna de Retorno para la inversión de 60.000, con flujos fijos de 25.000 USD durante tres periodos es del **12%** dado que es mayor a la Tasa de Descuento, esto indica que el proyecto o la inversión es favorable.

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Para resolver el caso y hallar en Excel la TIR se utilizará la función TIR, pero antes es necesario elaborar una tabla como la siguiente:

Tabla 9-6. Cálculo de la TIR con FNE constantes en Excel

TIR	0	1	2	3
	-60.000	25.000	25.000	25.000

Una vez elaborada la tabla de Excel con FNE y la Inversión Inicial, e necesario ubicarse en la celda para determinar la Tasa Interna en la cual se calculará el indicador. Posteriormente digitar =TIR(, seleccionar el valor de la inversión hasta el último FNE y luego dar clic en Aceptar. Ver como resultaría esto:

	TIR	0	1	2	3
=TIR(L147:O147)		0	25,000.00	25,000.00	25,000.00

El resultado es:

TIR	0	1	2	3
12%	-60.000	25.000	25.000	25.000

Como se observa, coincide el valor obtenido de la fórmula y de la función, con una TIR equivalente al 12%

TIR cuando solo existe un ingreso:

Ejemplo 7

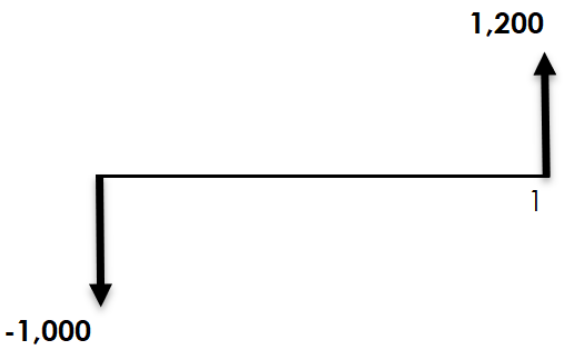
Determinar la Tasa Interna de Retorno de una inversión de 1.000 USD, que un año después recibe 1.200 USD como beneficios.

Solución:

Se tienen los siguientes datos:

$$II = 1.000 \qquad FNE = 1.200 \qquad TIR = ?$$

Gráfica 9-7. Flujo de caja con un único FNE



Para recordar, la TIR es la tasa que hace que el VPN sea igual a cero (0).

Fx Fórmulas

$$TIR = -II + \sum \frac{FNE}{(1+\mathbf{TD})\mathbf{n}} = 0$$

$$TIR = -1.000 + \frac{1.200}{(1+i)1} = 0$$

$$TIR = \frac{1.200}{(1+i)} = 1.000$$

$$TIR = 1.200 = 1.000\,(1+i)$$

$$TIR = \frac{1.200}{1.000} = (1+i)$$

$$TIR = \frac{1.200}{1.000} - 1 = i$$

$$TIR = 0{,}2$$

$$TIR = 0{,}2 \times 100 = 20\,\%$$

Respuesta: La Tasa Interna de Retorno para una inversión de 1.000 USD que generó un ingreso al año de 1.200 USD equivale al **20%**

.Xls *En Excel quedaría así:*

Para resolver el caso y hallar en Excel la TIR se utilizará la función TIR, pero antes es necesario elaborar una tabla como la siguiente:

Tabla 9-7. Cálculo de la TIR con un único FNE en Excel

0	1
-1.000	1.200

TIR =	

0	1
-1,000	1,200

=TIR(F177:G177)

0	1
-1.000	1.200

TIR =	20%

TIR cuando existen dos FNE o ingresos constantes:

Ejemplo 8

Una odontóloga procedente del municipio más alegre de Colombia invierte en un kit de instrumentación el valor de 500 USD, un año después, luego de saldar costos y gastos recibe 330 USD y un año después 330 USD como utilidades.

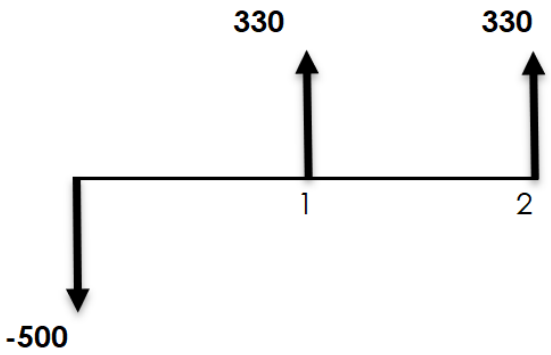
Determinar la Tasa Interna de Retorno para la odontóloga luego de haber invertido en el kit.

Solución:

Se cuenta con los siguientes datos:

II = 500 FNE1 = 330 FNE2 = 330 TIR = ?

Gráfica 9-8. Flujo de caja para dos FNE constantes



Para recordar, la TIR es la tasa que hace que el VPN sea igual a cero (0).

Fx Fórmulas

$$TIR = -II + \sum \frac{FNE}{(1+TD)n} = 0$$

En este caso como se presentan dos flujos iguales, es posible solucionarlos con la ecuación cuadrática ax2 + bx + c, la cual se resuelve con la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para ello es necesario ordenar el siguiente planteamiento:

$$\mathbf{TIR} = -500 + \frac{330}{(1+i)} + \frac{330}{(1+i)^2} = 0$$

$$\mathbf{TIR} = \frac{330}{(1+i)} + \frac{330}{(1+i)^2} = 500$$

$$\mathbf{TIR} = \frac{330}{(1+i)} + 330 = 500(1+i)^2$$

$$\mathbf{TIR} = 330 + 330(1+i) = 500(1+i)^2$$

$$\mathbf{TIR} = 0 = 500(1+i)^2 - 330(1+i) - 330$$

En el cual,

$X = (1 + i)$ $\quad a = 500$ $\quad b = -330$ $\quad c = -330$

Entonces,

$$(1+\mathbf{i}) = \frac{330 \pm \sqrt{-330^2 - 4(500)(-330)}}{2(500)}$$

$$(1+\mathbf{i}) = \frac{330 \pm \sqrt{768.900}}{1.000}$$

$$(1+\mathbf{i}) = \frac{330 \pm 876{,}8694316}{1.000}$$

$$\mathbf{i}(1) = \frac{330 \pm 876{,}8694316}{1.000} - 1$$

$$\mathbf{i}(1) = \frac{330 + 876{,}8694316}{1.000} - 1$$

$$i(1) = 0{,}20689431 \times 100 = 20{,}69\ \%$$

$$\mathbf{i}(2)=\frac{330-876,8694316}{1.000}-1$$

$$i(1) = -1,5468694 \times 100 = -154,69\ \%$$

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Para resolver el caso y hallar en Excel la TIR, se utilizará la función TIR, pero antes es necesario elaborar una tabla como la siguiente:

Tabla 9-8. Cálculo de la TIR con dos FNE constantes en Excel

0	1	2
-500	330	330

TIR =	

0	1	2
-500	330	330

=TIR(F197:H197)

0	1	2
-500	330	330

TIR =	20,69%

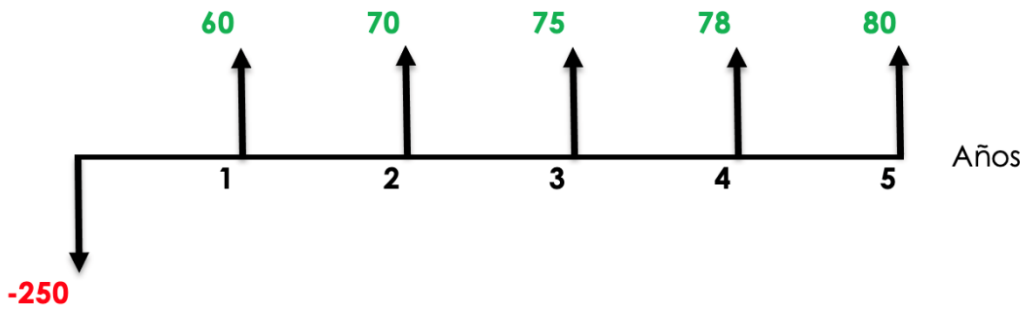
Respuesta: La Tasa Interna de Retorno para una inversión de 500 USD que generó ingresos al año de 330 USD, para el segundo año equivale al **20,69%**

TIR cuando se tiene más de un ingreso variable:

Ejemplo 9

Un comercializador de plátano del municipio más alegre de Colombia invierte en la compra de un pequeño camión para el transporte de su producto, el cual fue adquirido por un valor de 250 millones de COP, una vez iniciadas sus operaciones mercantiles, y luego de saldar sus costos y gastos operacionales, este le generó utilidades durante 5 años, como se pueden apreciar en la siguiente gráfica (valores en millones de COP):

Gráfica 9-9. Flujo de caja inversión con FNE variables



Determinar la Tasa Interna de Retorno para el comercializador por la inversión al adquirir su propio camión.

Solución:

Teniendo en cuenta la información suministrada, se observa que los flujos son variables; para dar solución a este caso es necesario la utilización de una función de Excel.

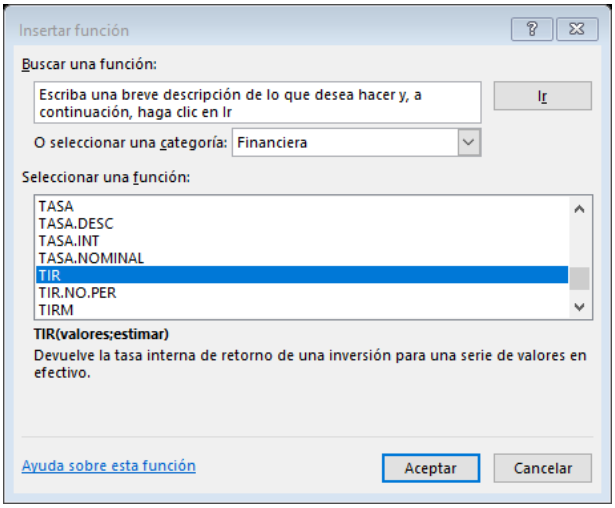
En Excel quedaría así:

Tabla 9-9. Flujo de caja con FNE variables

0	1	2	3	4	5
-250	60	70	75	78	80

Una vez se tenga en Excel una tabla como la anterior, se debe ubicar en una celda donde se desee obtener la TIR; posteriormente, ir a insertar función *financiera*, seleccionar la opción *TIR* y luego dar clic en *Aceptar*. Ver cómo hacerlo:

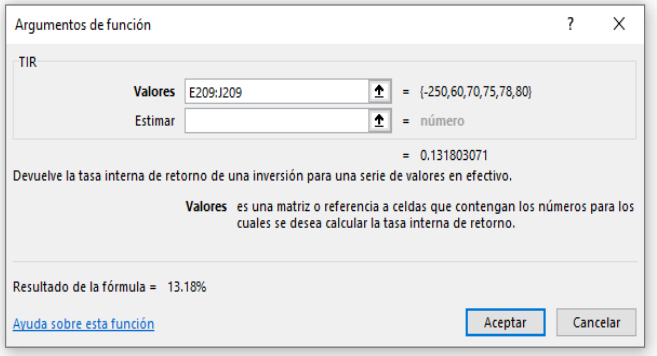
Imagen 70. Función TIR



Luego se despliega una nueva ventana, la cual solicita los valores; se debe seleccionar de la tabla de Excel desde la celda de la inversión (negativa) hasta el último periodo, sin soltar, y dar clic en *Aceptar*.

Imagen 71. Función TIR Variables

0	1	2	3	4	5
-250	60	70	75	78	80



Se obtendrá el siguiente resultado:

TIR	13,18%

Respuesta: La Tasa Interna de Retorno para la inversión de 250 COP en la compra de un camión, le permitirá recuperar al comercializador de plátano un promedio anual del **13,18%** del valor de su adquisición.

Tasa Interna de Rendimiento Modificada (TIRM)

TIRM: Este indicador, considera la reinversión de los FNE en el proyecto y además los negativos que se puedan presentar, tema que no se contempla en la TIR normal, este indicador es más confiable a la hora de evaluar proyectos de inversión económica.

A la hora de establecer la TIRM es necesario las siguientes variables: Valor de la Inversión del Proyecto, FNE, tasa interés de financiamiento y tasa de reinversión o tasa de oportunidad. (Triana, 2022)

Fx Fórmulas

$$TIRM = \left[\frac{\text{VF de FNE Positivos}}{\text{VP de FNE Negativos}} \right]^{(1 \div n)} - 1$$

- TIRM = Tasa Interna de Retorno Modificada.
- VF = Valor Futuro de los FNE Positivos aplicando la tasa de Financiamiento
- VP = Valor Presente de los FNE Negativos aplicando la tasa de Reinversión.
- n = Periodos de Evaluación

Ejemplo 10

Alejandra tiene un emprendimiento familiar en la finca de sus padres, que requiere una inversión de 50.000.000 de COP. Una vez elaborados los flujos de caja, éstos arrojaron para el primer año un FNE de 17.300.000, para el año 2, 18.900.000, para el 3, 19.800.000 y para el año 4, 21.500.000 COP.

Si el negocio descuenta a razón del 9%(tasa de oportunidad) y la tasa de financiación es del 11%

Por lo anterior, determine: ¿Cuál es la TIRM del proyecto de Alejandra?

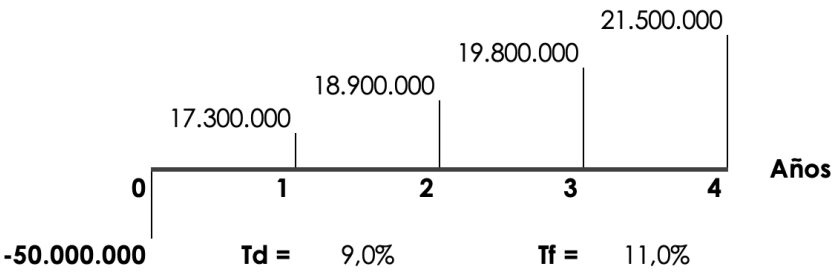
Solución:

El primer paso es identificar las variables que suministra el caso, seguidamente se realiza el flujo de caja y finalmente, se aplican las fórmulas si se soluciona mecánicamente o a través de la función de Excel TIRM.

Datos del Proyecto:

Ítem	Valor
Inversión	50.000.000
FNE 1	17.300.000
FNE 2	18.900.000
FNE 3	19.800.000
FNE 4	21.500.000
Td	9%
Tf	11%

Gráfica 9-10. Flujo de Caja TIRM



Ahora el paso a seguir en el proceso matemático es identificar los flujos negativos y determinar su valor presente, recordar que estos se hacen a la tasa de financiación del 11%

	Flujos Negativos				
	0	1	2	3	4
	50.000.000				
	VP Flujo (Costo de Financiamiento)				
	50.000.000	0	0	0	0
Suma =	50.000.000				

Una vez se identifican los flujos positivos, se determina su valor futuro, a la tasa de reinversión del 10% como se evidencia a continuación:

Flujos Positivos				
0	1	2	3	4
0	17.300.000	18.900.000	19.800.000	21.500.000
VF Flujo (Costo de Reinversión)				
0	22.404.002	22.455.090	21.582.000	21.500.000

Suma = 87.941.092

Una vez hallados estos dos valores se reemplaza en la fórmula de la TIRM

$$TIRM = \left[\frac{87.941.092}{50.000.000} \right]^{(1\div 4)} - 1$$

$$TIRM = 0{,}15161 \times 100$$

$$TIRM = 15{,}16\%$$

Aplicando la función de Excel

Td = **9,0%** Tf = **11,0%**

0	1	2	3	4
-50.000.000	17.300.000	18.900.000	19.800.000	21.500.000

TIR = **19,4%** TIR Moc=**TIRM(E242:I242;I239;F239)**

Td =	9,0%		Tf =	11,0%

0	1	2	3	4
-50.000.000	17.300.000	18.900.000	19.800.000	21.500.000

TIR =	19,4%	TIR Modificada	15,16%

9.5 PERIODO DE RECUPERACIÓN DE LA INVERSIÓN (PRI)

Concepto: Este indicador le permite al inversionista de un proyecto, establecer en qué momento recuperará el 100%del capital invertido en dicha actividad. (Triana, 2021)

Para evaluar un proyecto ideal que este indicador se encuentre dentro del tiempo evaluado del proyecto

A considerar para estimar el PRI son: los flujos netos de efectivo, la tasa de descuento y el horizonte del proyecto.

Fx Fórmulas

$$\mathbf{PRI(d)} = \left[\frac{\text{ii}}{\left(\Sigma \text{FNE (d)} \div \text{n} \right)} \right]$$

- PRI (d) = Periodo de Recuperación de la Inversión Descontado
- FNE (d) = Flujos Netos de Efectivo Descontados o Actualizados
- ii = Inversión Inicial
- n = Tiempo del Proyecto

Ejemplo 11

Toño un ingeniero de gran prestigio en el mundo de las obras civiles en la capital, desea conocer en qué año recuperará la inversión realizada en un proyecto familiar. Por lo anterior, menciona la siguiente información:

Ítem	Valor
Inversión	22.000
FNE año 1	6.300
FNE año 2	7.600
FNE año 3	7.900
FNE año 4	8.100
FNE año 5	6.500
Tasa	10%

Lo anterior se representa de la siguiente forma:

0	1	2	3	4	5
-22.000	6.300	7.600	7.900	8.100	6.500

Luego, se debe estimar el valor presente de cada valor, dicho otra forma, se deben actualizar los valores al periodo cero (0). Esto se representa de la siguiente forma:

Fx Fórmulas

Valor Presente:

$$Vp = V(x)\ (\ 1 + \%)\text{-}n$$

- Vp = Valor Presente
- V(x) = Valor X que se encuentra en el futuro.
- %= Tasa de Interés o Descuento.
- n = Tiempo

Aplicando la fórmula de Vp a los flujos.

0	1	2	3	4	5
22.000(1,1)-0	6.300(1,1)-1	7.600(1,1)-2	7.900(1,1)-3	8.100(1,1)-4	6.500(1,1)-5

El resultado será:

0	1	2	3	4	5
-22.000	5.727	6.281	5.935	5.532	4.036

Seguidamente, se suman los valores presentes obtenidos de los FNE del periodo 1 al 5

$$\Sigma FNE\ (d) = 5.727 + 6.281 + 5.935 + 5.535 + 4.036$$

$$\Sigma FNE\ (d) = 27.512$$

Una vez se cuenta con la sumatoria de los flujos actualizados solo basta sustituir en la fórmula del PRI de esta manera:

- ΣFNE (d) = 27.512
- ii = 22.000
- n = 5

$$\mathbf{PRI(d)} = \left[\frac{22.000}{(27.512 \div 5)} \right]$$

$$PRI\ (d) = 4,0$$

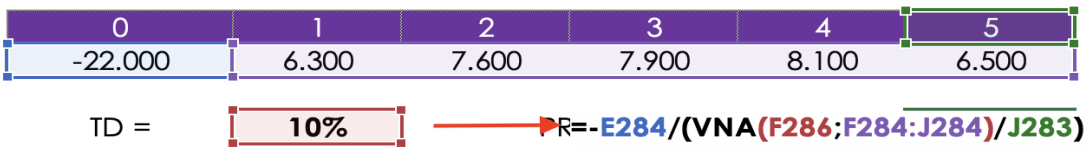
Respuesta: El Ingeniero recobrará el 100%de su inversión el periodo 4. Teniendo en cuenta que el PRI(d) Descontado es de **4,0**

Para este indicador Excel no tiene una función que ayude a estimarlo de manera sencilla y precisa como en otros casos ya trabajados, sin embargo, es posible aplicar la fórmula con otras ya trabajadas como la VNA, para ello, es necesario plantear el problema en una hoja de cálculo de la siguiente manera:

0	1	2	3	4	5
-22.000	6.300	7.600	7.900	8.100	6.500

TD = 10% PRI Descontado Fórmula

Una vez elaborado el esquema, se aplica la función digitando lo requerido como se refleja a continuación.



0	1	2	3	4	5
-22.000	6.300	7.600	7.900	8.100	6.500

TD = **10%** PRI Descontado **4,0**

PROBLEMAS

1- Calcule el VPN, TIR, PRI y determine el mejor proyecto.

DATOS INVERSIÓN	N° 1	N° 2
Recursos propios - Inversión		110.000.000 um
Terceros - Deuda - Inversión	10.000.000 um	10.000.000 um
Valor inversión proyecto	125.000.000 um	

DATOS FNE	N° 1	N° 2
(FNE) año 0	um	um
Tasa de Descuento	10,50%	11,90%
Periodos por evaluar	5	5
Ingresos (FNE) año 1	15.000.000 um	30.500.000 um
Ingresos (FNE) año 2	25.000.000 um	30.500.000 um
Ingresos (FNE) año 3	32.000.000 um	30.500.000 um
Ingresos (FNE) año 4	46.000.000 um	30.500.000 um
Ingresos (FNE) año 5	50.000.000 um	

2- Determinar WACC, VPN, TIR, PRI y defina el mejor proyecto.

DATOS WACC	N° 1	N° 2
Recursos propios - Inversión	um	um
Costo del P/nio (% u oportunidad	12%	12,5%
Terceros - Deuda - Inversión	20.000.000 um	15.000.000 um
Costo de la deuda	23,5%	28,5%
Tasa de impuestos	34%	34%
Valor inversión proyecto	120.000.000 um	85.000.000 um

DATOS FNE	N° 1	N° 2
(FNE) año 0	um	um
Tasa de Descuento	%	%
Periodos por evaluar	5	5
Ingresos (FNE) año 1	34.500.000 um	22.500.000 um
Ingresos (FNE) año 2	34.500.000 um	22.500.000 um
Ingresos (FNE) año 3	34.500.000 um	22.500.000 um
Ingresos (FNE) año 4	34.500.000 um	22.500.000 um
Ingresos (FNE) año 5	34.500.000 um	22.500.000 um

Bibliografía

Agudelo, D. (2019). MATEMÁTICAS FINANCIERAS conceptos y aplicaciones (E. Pearson (ed.); Primera ed).

Álvarez, A. (2005). Matemáticas financieras. (3.a edición). McGraw-Hill Interamericana.

Baca Urbina, G. (2016). Evaluación de PROYECTOS (Octava edi). McGraw Hill.

Baca, G. (2000). Ingeniería económica. (8.a edición). F. E. Panamericano.

Baca, G. (2003). Fundamentos de ingeniería económica. (3.a edición). McGraw-Hill.

Díaz Mata, A. y Aguilera Gómez, V. (2008). Matemáticas financieras. (4.a edición). McGraw-Hill.

Durbán, S. (2017). Finanzas corporativas (Primera ed). EDICIONES PIRÁMIDE.

Gutiérrez, J. (2008). Modelos Financieros con Excel. In Finanzas (Segunda ed). Ecoe Ediciones.

Imbernón, F. (2007). La investigación educativa y la formación del profesorado. (3.a edición). Graó.

Jaguán, A. (2009). Matemáticas financieras. Ediciones Valle.

Jara Vargas, S. (2015). Matemática financiera para no financieros. Ediciones UTMACH.

Kozikowski, Z. (2007). Matemáticas financieras. El valor del dinero en el tiempo. McGraw-Hill.

Meza, Jhonny de Jesús. (2017). Matemáticas Financieras Aplicadas (6th ed.). Ecoe Ediciones.

Meza, Jhonny de Jesús. (2017). Evaluación Financiera de Proyectos (Cuarta edi). Ecoe Ediciones.

Moya, C. (2013). Gestión financiera.

López, A. (2017). Administración de Proyectos (Primera ed). Pearson Educación.

Triana, O. (2021). MATEMÁTICAS FINANCIERAS BÁSICAS APLICADAS (Primera ed). Editorial de la Universidad de Cundinamarca.

Padilla, M. C. (2016). Formulación y evaluación de proyectos. (2.a edición).

Marcial, C. P. (2012). Gestión financiera. In Gestión Financiera (Primera ed). Ecoe Ediciones.

Samuelson, P. A. (2010). Economía con aplicaciones a Latinoamérica. (19.a edición). Pearson.

Sapag Chaín, N. (2007). Proyectos de inversión. Formulación y evaluación. Pearson.

Serna, R. (2012). Manual didáctico de matemáticas financieras. Facultad de Posgrados, Universidad EAN, Bogotá.

Villalobos, J. L. (2017). Matemáticas Financieras (Quinta edi). Pearson Educación.

Lista de tablas

Tabla 1-1. Funciones Financieras 35
Tabla 2-1. Amortización de intereses 41
Tabla 2-2. Desarrollo del Problema IS 42
Tabla 2-3. Variables del caso CDT 67
Tabla 2-4. Solución: liquidación del CDT 68
Tabla 3-1. Tabla progresiva del origen de la fórmula de interés compuesto o valor futuro 73
Tabla 3-2. Amortización de intereses para ajustar las variables tiempo y tasa 74
Tabla 3-3. Tabla de Excel lista para aplicar función VF 76
Tabla 3-4. Tabla de Excel lista para aplicar la función VF 78
Tabla 3-5. Tabla de Excel lista para aplicar función VA 82
Tabla 3-6. Tabla de Excel lista para aplicar función NPER 87
Tabla 3-7. Tabla de Excel lista para aplicar función TASA 92
Tabla 4-1. Amortización para el cálculo de tasas de interés 102
Tabla 4-2. Tasa nominal en Excel 110
Tabla 4-3. Tasa efectiva en Excel 114
Tabla 4-4. Índices de precios al consumidor 120
Tabla 4-5. Inflación mes a mes de 2020 - 2021 121
Tabla 5-1. Hallar n en una anualidad vencida 139
Tabla 5-2. Datos anualidad vencida en Excel 141
Tabla 5-3. Estimación tasa de interés 144
Tabla 5-4. Estimación cuota crédito 146
Tabla 5-6. Tiempo de una anualidad anticipada 155
Tabla 5-7. Tasa de interés de una anualidad anticipada 159
Tabla 5-8. Valor presente o actual de una anualidad anticipada 162
Tabla 5-9. Valor futuro de una anualidad anticipada 165

Tabla 6-1. Canon de leasing operativo 190
Tabla 6-2. Canon de leasing financiero a través de Excel 196
Tabla 6-3. Valor del activo de leasing financiero a través de Excel 198
Tabla 6-4. Canon de leasing habitacional a través de Excel 202
Tabla 6-5. Comportamiento pagos 204
Tabla 7-1. Valor presente gradiente lineal creciente 216
Tabla 7-2. Amortización del valor presente gradiente lineal creciente 217
Tabla 7-3. Valor primera cuota gradiente lineal creciente 219
Tabla 7-4. Amortización cálculo primera cuota valor presente gradiente lineal creciente 221
Tabla 7-5. Valor primera cuota gradiente lineal creciente 225
Tabla 7-6. Amortización cálculo primera cuota valor presente gradiente lineal creciente 227
Tabla 7-8. Valor presente de un gradiente lineal decreciente 233
Tabla 7-9. Amortización valor presente gradiente lineal creciente 235
Tabla 7-10. Valor presente gradiente geométrico creciente vencido 241
Tabla 7-11. Amortización cálculo valor presente gradiente geométrico creciente vencido 243
Tabla 7-12. Valor futuro de un gradiente geométrico creciente vencido 246
Tabla 7-13. Amortización cálculo valor presente gradiente geométrico creciente vencido 248
Tabla 7-14. Amortización cálculo valor presente de un gradiente geométrico decreciente vencido 251
Tabla 8-1. Amortización pago al final del periodo 260
Tabla 8-2 .Amortización pago al final del periodo 261
Tabla 8-3. Amortización pago al final del periodo 264
Tabla 8-4. Cálculo cuota fija vencida a través de Excel 265
Tabla 8-4. Amortización cuota fija con pagos anticipados 271
Tabla 8-5. Cálculo cuota fija anticipada a través de Excel 272
Tabla 8-6. Amortización sistema cuota variable - Amortización constante mes vencido 276

Tabla 8-7. Amortización sistema cuota variable - Amortización constante a capital mes anticipado 278
Tabla 8-8. Amortización cuota fija con gracia en el pago 283
Tabla 8-9. Cálculo cuota fija con gracia en el pago 284
Tabla 9-1. FCL Económico 291
Tabla 9-2. FCL Financiero 292
Tabla 9-3. Cálculo del VPN en Excel 300
Tabla 9-4. Cálculo del VPN con FNE constantes en Excel 305
Tabla 9-5. Cálculo del VPN con FNE constantes en Excel 308
Tabla 9-6. Cálculo de la TIR con FNE constantes en Excel 313
Tabla 9-7. Cálculo de la TIR con un único FNE en Excel 316
Tabla 9-8. Cálculo de la TIR con dos FNE constantes en Excel 319
Tabla 9-9. Flujo de caja con FNE variables 321

Lista de gráficas

Gráfica 2-1. Diagrama o flujo de caja. 41
Gráfica 2-2. Diagrama o Flujo de caja 43
Gráfica 2-3. Flujo de caja de la compra. 44
Gráfica 2-4. Flujo de caja de la inversión. 46
Gráfica 2-5. Diagrama de flujo tasa de interés 48
Gráfica 2-6. Diagrama de flujo tasa de interés 49
Gráfica 2-7. Diagrama de estimación del plazo 51
Gráfica 2-8. Flujo de caja 52
Gráfica 2-9. Diagrama de cálculo de intereses 54
Gráfica 2-10. Diagrama de cálculo de intereses 55
Gráfica 2-11. Diagrama de estimación del valor por pagar 57
Gráfica 2-12. Diagrama cálculo del interés 58
Gráfica 2-13. Diagrama de cálculo de la tasa de descuento 60
Gráfica 2-14. Diagrama de cálculo del valor adeudado 61
Gráfica 2-15. Diagrama de cálculo del tiempo 62
Gráfica 2-16. Diagrama de pagos por la adquisición de la máquina 65
Gráfica 2-17. Diagrama de inversión de un CDT 67
Gráfica 3-1. Flujo de Caja del Valor Futuro 75
Gráfica 3-2. Flujo de caja del valor futuro 2 80
Gráfica 3-3. Diagrama Valor Presente 81
Gráfica 3-4. Diagrama valor presente 85
Gráfica 3-5. Diagrama cálculo del tiempo 86
Gráfica 3-6. Diagrama cálculo del tiempo 90
Gráfica 3-7. Diagrama tasa de interés 91
Gráfica 5-1. Diagrama anualidad vencida 129
Gráfica 5-2. Diagrama de dos anualidades vencidas 131

Gráfica 5-3. Flujo de Caja - tiempo anualidad vencida 135
Gráfica 5-4. Diagrama pago del terreno 137
Gráfica 5-5. Diagrama ejemplo anualidad anticipada 149
Gráfica 5-6. Diagrama ejemplo 2 anualidad anticipada 151
Gráfica 5-7. Diagrama cálculo del tiempo 153
Gráfica 5-8. Diagrama cálculo valor presente 154
Gráfica 5-9. Tiempo de una anualidad anticipada 155
Gráfica 5-10. Tasa de interés de una anualidad anticipada 159
Gráfica 5-11. Valor presente o actual de una anualidad anticipada 162
Gráfica 5-12. Valor futuro de una anualidad anticipada 165
Gráfica 5-13. Diagrama de anualidad diferida 170
Gráfica 5-14. Diagrama de anualidad diferida 171
Gráfica 5-15. Diagrama de valor presente anualidad diferida 172
Gráfica 5-16. Diagrama de valor futuro anualidad diferida 174
Gráfica 5-17. Anualidad perpetua o infinita 175
Gráfica 5-17. Diagrama de renta perpetua mensual vencida 176
Gráfica 5-18. Diagrama de flujo invesiones 177
Gráfica 6-1. Canon leasing operativo 189
Gráfica 6-2. Canon leasing financiero 194
Gráfica 6-3. Valor del activo leasing financiero 195
Gráfica 6-4. Leasing habitacional 202
Gráfica 7-1. Comportamiento de un gradiente 212
Gráfica 7-2. Valor presente de un gradiente lineal 215
Gráfica 7-3. Valor primera cuota de un gradiente lineal 219
Gráfica 7-4. Valor primera cuota, gradiente lineal 224
Gráfica 7-5. Valor futuro de un gradiente lineal 230
Gráfica 7-6. Valor presente de un gradiente lineal decreciente 232
Gráfica 7-7. Valor futuro de un gradiente lineal decreciente 238
Gráfica 7-8. Valor presente de un gradiente geométrico creciente vencido 240

Gráfica 7-9. Valor futuro de un gradiente geométrico creciente vencido 245

Gráfica 7-10. Valor presente de un gradiente geométrico decreciente vencido 249

Gráfica 8-1. Sistema de amortización pago único al final del plazo 259

Gráfica 8-2. Sistema de amortización pago único al final del plazo 261

Gráfica 8-3. Sistema de amortización cuota fija mes vencido 263

Gráfica 8-4. Sistema de amortización cuota fija trimestre vencido 269

Gráfica 8-5. Sistema de amortización cuota fija bimestre anticipado 270

Gráfica 8-6. Sistema cuota variable - Amortización constante 275

Gráfica 8-7. Sistema cuota variable - Amortización constante 277

Gráfica 8-8. Amortización cuota fija con gracia en el pago 282

Gráfica 9-1. Flujo de caja del VPN 298

Gráfica 9-2. Flujo de caja para el cálculo del VPN 299

Gráfica 9-3. Flujo de caja con FNE constantes 303

Gráfica 9-4. Flujo de caja ingresos máquina con FNE constantes 306

Gráfica 9-5. Flujo de caja ingresos máquina caso 2, con FNE constantes 307

Gráfica 9-6. Flujo de caja con FNE constantes 310

Gráfica 9-7. Flujo de caja con un único FNE 314

Gráfica 9-8. Flujo de caja para dos FNE constantes 317

Gráfica 9-9. Flujo de caja inversión con FNE variables 320

Gráfica 9-10. Flujo de Caja TIRM 324

Lista de imágenes

Imagen 1. Celda B2 22
Imagen 2. Formato de Celda 23
Imagen 3. Formato de Celda 2 24
Imagen 4. Estructura de una función 25
Imagen 5. Insertar Función 26
Imagen 6. Buscar Objetivo 28
Imagen 7. Aplicación buscar objetivo 29
Imagen 8. Solver 30
Imagen 9. Venta de Solver 31
Imagen 10. Macros 32
Imagen 11. Grabar una Macro 33
Imagen 12. Inicio Grabación de una Macro 34
Imagen 13. Insertar función. 76
Imagen 14. Ventana Insertar Función. 77
Imagen 15. Función VF. 77
Imagen 16. Función VF variables. 78
Imagen 17. Función VA 83
Imagen 18. Función VA variables 83
Imagen 19. Función NPER 88
Imagen 20. Función NPER variables 88
Imagen 21. Función TASA - variables 93
Imagen 22. Función TASA 94
Imagen 23. Insertar Función 111
Imagen 24. Función TASA.NOMINAL 111
Imagen 25. Función TASA.NOMINAL variables 112
Imagen 26. Función INT.EFECTIVO 115
Imagen 27. Función INT.EFECTIVO variables 115

Imagen 27. Diagrama anualidad vencida 128
Imagen 28. Función NPER 139
Imagen 29. Función NPER variables 140
Imagen 30. Insertar Función 142
Imagen 31. Función VF 142
Imagen 32. Función VF variables 143
Imagen 33. Función TASA 144
Imagen 34. Función TASA variables 145
Imagen 35. Función PAGO 147
Imagen 36. Función PAGO variables 147
Imagen 37. Diagrama Anualidad Anticipada 148
Imagen 37. Función TASA.NOMINAL 156
Imagen 38. Función NPER 157
Imagen 39. Función NPER variables 158
Imagen 40. Función TASA 160
Imagen 41. Función TASA variables 160
Imagen 42. Función VA 163
Imagen 43. Función VA variables 163
Imagen 43. Función VF 166
Imagen 44. Función VF variables 166
Imagen 45. Función PAGO 191
Imagen 46. Función PAGO variables 191
Imagen 47. Función PAGO 197
Imagen 48. Función PAGO variables 197
Imagen 49. Función VA 199
Imagen 50. Función VA variables 199
Imagen 51. Datos, Análisis de Hipótesis – Buscar Objetivo 222
Imagen 52. Datos, Análisis de Hipótesis – Buscar Objetivo 228
Imagen 53. Datos, Análisis de Hipótesis – Buscar Objetivo 236

Imagen 54. Datos, Análisis de Hipótesis – Buscar Objetivo.....252
Imagen 55. Función PAGO.....265
Imagen 56. Función PAGO variables.....266
Imagen 57. Simulación Cuota Fija.....268
Imagen 58. Simulación Cuota Fija Variables.....268
Imagen 59. Función PAGO.....272
Imagen 60. Función PAGO variables.....273
Imagen 61. Simulación Cuota Fija.....280
Imagen 62. Función VF.....285
Imagen 63. Función VF variables.....285
Imagen 64. Función PAGO.....286
Imagen 65. Función PAGO variables.....287
Imagen 66. Costo Promedio Ponderado de Capital - WACC.....296
Imagen 67. Resultado Costo Promedio Ponderado de Capital.....296
Imagen 68. Función VNA.....301
Imagen 69. Función VNA Variables.....301
Imagen 70. Función TIR.....321
Imagen 71. Función TIR Variables.....322

Editorial UCundinamarca

UDEC
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

www.ucundinamarca.edu.co

Universidad de Cundinamarca

ucundinamarcaoficial

@ucundinamarca

UCUNDINAMARCATV

ISBN: 978-958-5195-74-5

CO-SC-CER355037

ISO 9001

SC-CER355037

Vigilada MinEducación